УДК 519.6

НЕПОКРАЩУВАНА ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСПОНЕНТИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Володимир Макаров, Наталія Майко, Вячеслав Рябічев

Інститут математики НАН України,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

MakarovImath@gmail.com, mayko@knu.ua, ryabichev@knu.ua

Розглянемо в гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (u,v) і нормою $\| u \| = \sqrt{(u,u)}$ абстрактну задачу Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = 0, \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0 , \tag{2}$$

де A – самоспряжений додатно визначений оператор зі щільною в H областю визначення $D(A) \subset H$.

В [1, 2] доведено, що за умови скінченної гладкості початкового вектора $x_0 \in D(A^{\sigma})$, $\sigma > 1$, розв'язок $x(t)$ задачі (2) може бути зображений рядом

$$x(t) = e^{-tA} x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0 , \tag{3}$$

де $\gamma > 0$ – довільне число, $L_p^{(0)}(t)$ – поліноми Лагерра [3], I – одиничний оператор, $T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1} (\gamma I - A)$ – перетворення Келі оператора A .

Зазначимо, що при $\sigma > 0$ сума $x(t)$ ряду (3) є неперервною функцією для всіх $t \ge 0$ і може розглядатися як узагальнений розв'язок задачі (2).

За наближений розв’язок задачі (2) візьмемо частинну суму ряду (3):

$$x_N(t) = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{N} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0 . \tag{4}$$

Для точності цього наближення доведено теореми, які підсилюють результати [4].

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_09.pdf

Теорема 1. *Нехай оператор* A *і початковий вектор* x_0 *задачі (2) задовольняють умови* $A = A^* \ge \lambda_0 I$, $\lambda_0 > 0$, $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 0$, $0 < \gamma \le \lambda_0$. *Тоді точність наближеного розв'язку (3) характеризується оцінкою*

$$z_N \equiv \left\{ \int_0^{+\infty} \| x(t) - x_N(t) \|^2 \, dt \right\}^{1/2} \le \frac{C}{N^{\sigma+1/2}} \| A^\sigma x_0 \|, \tag{5}$$

де $C = \dfrac{(1+\sigma)^{2(1+\sigma)}}{(2\sigma+1)(2\gamma)^{2\sigma+1}}$ *– додатна стала, не залежна від* N *та* x_0, $N+1 \ge \dfrac{\lambda_0(1+\sigma)}{2\gamma}$.

Теорема 2. *Оцінка (5) непокращувана за порядком* N, *точніше:*

$$z_N^2 \ge \frac{C}{(N+1)^{2\sigma+1}}$$

для всіх $N \ge N^*$, *де* N^* *– деяке натуральне число,* $C > 0$ *– не залежна від* N *стала.*

1. *Gavrilyuk I.P.*, *Makarov V.L.* The Cayley transform and the solution of an initial value problem for a first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Hilbert space // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 1994. – **15**, No. 5–6. – P. 583–598.
2. *Arov D.Z., Gavrilyuk I.P., Makarov V.L.* Representation and approximation of solutions of initial value problems for differential equations in Hilbert space based on the Cayley transform // Elliptic and Parabolic Problems (Pont-à-Mousson, 1994), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 325, Longman Sci. Tech., Harlow, 1995. – P. 40–50.
3. *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions, Vol. 2. – New York: McGraw-Hill, 1953.
4. *Makarov V.L., Vasylyk V.B., Ryabichev V.L.* Unimprovable order-of-magnitude estimates of the rate of convergence of the cayley transform method for approximation of an operator exponent // Cybernetics and Systems Analysis. – 2002. – **38**, No. 4. – P. 632–636.

THE UNIMPROVABLE ESTIMATE OF THE CAYLEY TRANSFORM METHOD FOR THE OPERATOR EXPONENTIAL FUNCTION IN A HILBERT SPACE

We obtain the accuracy estimate of the Cayley transform method for solving the initial value problem for the first-order differential equation with a self adjoint positive definite operator in a Hilbert space. The estimate indicates that the order of accuracy automatically depends on smoothness of the exact solution (that is the proposed method does not have the saturation of accuracy). We also establish that the estimate is unimprovable in order.