УДК 517.956.4

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Олександр Дяченко

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

ol_v_dyachenko@ukr.net

У доповіді обговорюються умови глобальної та локальної регулярності узагальнених розв'язків крайових задач для параболічних за Петровським систем диференціальних рівнянь другого порядку, які отримано в [1]. Ці умови сформульовано в термінах належності правих частин задачі до узагальнених анізотропних просторів Соболєва. Регулярність розподілів у цих просторах визначається дійсними числами s і $s/2$ (за просторовими і часовою змінними відповідно) та уточнюється функціональним параметром φ. Використання останнього дозволяє отримати тонкіші результати, ніж це можливо в шкалах класичних анізотропних просторів Соболєва. Зауважимо, що теорію скалярних параболічних за Петровським задач в узагальнених просторах Соболєва побудовано в [2].

Нехай $\Omega := G \times (0,\tau)$ — відкритий циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S := \Gamma \times (0,\tau)$ — його бічна поверхня. Тут $G \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$, яка є основою циліндра Ω. Узагальнені простори Соболєва в Ω та на S означаються на основі базового гільбертового простору $H^{s,s/2;\varphi}(\mathbb{R}^{n+1})$. Останній складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^{n+1}$ таких, що

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^s \varphi^2\left(\left(1+|\xi|^2+|\eta|\right)^{1/2}\right)|\widehat{w}(\xi,\eta)|^2\, d\xi d\eta < \infty.$$

Тут $\widehat{w}$ є перетворенням Фур'є розподілу w, а $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}$ є частотними змінними, дуальними до просторової і часової змінних відповідно. Випадок $\varphi(\cdot) \equiv 1$ дає анізотропний простір Соболєва. Функціональний параметр $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ є вимірною за Борелем функцією, яка повільно змінюється на нескінченності за Карамата. Клас таких параметрів позначимо через $\mathcal{M}$.

Розглянемо у Ω початково–крайову задачу для параболічної за Петровським системи лінійних диференціальних рівнянь другого порядку:

$$Au = f, \quad Bu|_S = g, \quad u|_{t=0} = h. \tag{1}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_11.pdf

Тут $A := (A_{j,k}(x,t,D_x,\partial_t))$ і $B := \big(B_{j,k}(x,t,D_x)\big)$ — матричні лінійні диференціальні оператори з нескінченно гладкими комплекснозначними коефіцієнтами на $\overline{\Omega}$ і $\overline{S}$ відповідно; $\mathrm{ord} A_{j,k} \leq 2$, $\mathrm{ord} B_{j,k} \leq l_j \leq 1$; $u := (u_1,\ldots,u_N)$, $f := (f_1,\ldots,f_N)$, $g := (g_1,\ldots,g_N)$, $h := (h_1,\ldots,h_N)$. Нехай s — дійсне число, $s \geq 2$. Через $\mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ позначимо підпростір гільбертового простору

$$\big(H^{s-2,s/2-1;\varphi}(\Omega)\big)^N \oplus \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}(S) \oplus \big(H^{s-1;\varphi}(G)\big)^N$$

елементів (f,g,h), які задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1).

Теорема 1. [1] *Припустимо, що вектор-функція u з анізотропного простору Соболева $\big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)*, праві частини якої задовольняють умову $(f,g,h) \in \mathcal{G}^{s-2,s/2-1;\varphi}$ для деяких $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Тоді $u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}(\Omega)\big)^N$.*

Сформулюємо локальний аналог теореми 1. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\Omega_0 := U \cap \Omega \neq \varnothing$ і $U \cap \Gamma = \varnothing$. Покладемо: $\Omega' := U \cap \partial\overline{\Omega}$, $S_0 := U \cap S$, $S' := U \cap \{(x,\tau) : x \in \Gamma\}$ і $G_0 := U \cap G$.

Теорема 2. [1] *Нехай $s \geq 2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Припустимо, що вектор-функція $u \in \big(H^{2,1}(\Omega)\big)^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (1)*, праві частини якої локально належать таким просторам:*

$$f \in \big(H^{s-2,s/2-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N,$$

$$g \in \bigoplus_{j=1}^{N} H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(S_0,S'), \;\; h \in \big(H^{s-1;\varphi}_{\mathrm{loc}}(G_0)\big)^N.$$

Тоді $u \in \big(H^{s,s/2;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Omega')\big)^N$.

1. *Diachenko O., Los V.* Regular Conditions for the Solutions to Some Parabolic Systems // Ukrainian Math. J. – 2023. – **74**, No. 8. – P. 1263– 1274. (arXiv:2206.03821)
2. *Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О.* Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболєва. – Київ: Наукова думка, 2021. – 164 с.

ON REGULARITY OF SOLUTIONS TO SOME PARABOLIC PROBLEMS

We discuss global and local regularity of generalized solutions to parabolic initial-boundary value problem for Petrovskii system of second order differential equations. Results are formulated in terms of the belonging of right-hand sides of the problem to some generalized Sobolev spaces.