УДК 517.956

РАДІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПСЕВДО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ p-АДИЧНОГО АРГУМЕНТУ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Марія Сердюк

Київський Національний Університет імені Тараса Шевченка

mariia.v.serdiuk@gmail.com

У статті А.Н. Кочубея [1] було знайдено правий обернений до оператора дробового диференціювання D^α, $\alpha > 0$. Це дає змогу звести p-адичну задачу Коші для радіальних функцій до інтегрального рівняння, властивості якого нагадують властивості класичних рівнянь Вольтерра.

У роботі [2] було досліджено нелінійну задачу Коші

$$(D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)),\ 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,\ u(0) = u_0. \tag{1}$$

Тут

$$(D^\alpha \varphi)(t) = \frac{1 - p^\alpha}{1 - p^{-\alpha-1}} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\alpha-1} \left[\varphi(t-y) - \varphi(y)\right] dy. \tag{2}$$

За відповідних умов [2], нелінійне інтегральне рівняння, що відповідає (1), є a) локально розв'язним, b) його розв'язок продовжується на всі $t \in \mathbb{Q}_p$, та c) розв'язки задовольняють задачу Коші. Однак, питання про властивості сингулярних аналогів таких рівнянь залишається відкритим.

Нехай $\alpha > 0$, $\gamma > 0$. Ми розглядаємо задачу

$$|t|_p^\gamma (D^\alpha u)(|t|_p) = f(|t|_p, u(|t|_p)),\ 0 \neq t \in \mathbb{Q}_p,\ u(0) = u_0. \tag{3}$$

Ми припускаємо, що функція $f : p^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умови

$$|f(|t|_p, x)| \leq M,\ |f(|t|_p, x) - f(|t|_p, y)| \leq F|x - y|, \tag{4}$$

для всіх $t \in \mathbb{Q}_p,\ x, y \in \mathbb{R}$ і деяких сталих M, F, незалежних від t, x, y.

Із задачею (3) ми пов'язуємо інтегральне рівняння

$$u(|t|_p) = u_0 + I^\alpha \left[|\cdot|_p^{-\gamma} f(|\cdot|_p, u(|\cdot|_p))\right](|t|_p), \tag{5}$$

де p-адичний дробовий інтеграл визначається для функції $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ як

$$(I^\alpha \varphi)(t) = \frac{1 - p^{-\alpha}}{1 - p^{\alpha-1}} \int\limits_{|y|_p \leq |t|_p} \left(|t-y|_p^{\alpha-1} - |y|_p^{\alpha-1}\right)\varphi(y) dy,\ \alpha \neq 1,$$

$$(I^1\varphi)(t) = \frac{1-p}{p\log p} \int\limits_{|y|_p \le |t|_p} \big(\log|t-y|_p - \log|y|_p\big)\varphi(y)dy.$$

Теорема 1. *Нехай* $\gamma < \min(1,\alpha)$ *та виконуються умови* (4). *Тоді рівняння* (5) *має єдиний локальний розв'язок.*

Теорема 2. *Нехай* $\gamma < \min(1,\alpha)$, *функція* f *задовольняє умови* (4) *в наступному вигляді:*

$$|f(p^\ell, x) - f(p^\ell, y)| \le F_\ell |x-y|,\ x, y \in \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

де $0 < F_\ell < p^{-\alpha\ell}$ *для* $\ell \in \mathbb{Z}$. *Тоді локальний розв'язок рівняння* (5) *може бути продовжений до глобального розв'язку, визначеного для всіх* $t \in \mathbb{Q}_p$.

Теорема 3. *За умов* (6) *та*

$$|f(p^\ell, x)| \le Ap^{-\beta\ell},\ \ell \ge 1,\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $\beta+\gamma > \alpha$, *розв'язок рівняння* (5), *отриманий ітераційно з наступним продовженням, задовольняє рівняння* (3).

1. *Kochubei A. N.* Radial solutions of non-archimedean pseudo-differential equations // Pacif. J. Math. – 2014. – **269**. - P. 355–369.
2. *Kochubei A. N.* Nonlinear pseudo-differential equations for radial real functions on a non-Archimedean field // J. Math. Anal. – 2020. – **483**. – P. 1–11.

RADIAL SOLUTIONS OF PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF p-ADIC ARGUMENT WITH WEAK DEGENERATION

In paper A. N. Kochubei [1] a right inverse to Vladimirov fractional differential operator D^α, $\alpha > 0$ *was found. It turns out that this permits to reduce the p-adic Cauchy problem for radial functions to an integral equation whose properties resemble those of classical Volterra equations. We develop further these ideas to an important class of degenerate pseudo-differential equations. We find the conditions of local and global solvability for corresponding nonlinear weakly degenerate equations.*