УДК 517.956.4

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА З ТРЬОМА ГРУПАМИ ПРОСТОРОВИХ ЗМІННИХ ТА ВИРОДЖЕННЯМ НА ПОЧАТКОВІЙ ГІПЕРПЛОЩИНІ

Ольга Возняк[1], Віталій Дронь[2], Ігор Мединський[3]

[1]*Західноукраїнський національний університет*
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*
[3]*Національний університет "Львівська політехніка"*

olvoz@ukr.net, vdron@ukr.net, ihor.p.medynskyi@lpnu.ua

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$; просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \ldots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$; $\Pi_X := X \times \mathbb{R}^n$, якщо множина X належить до $\mathbb{R}$.

Розглянемо рівняння

$$Lu(t,x) := (S - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

в якому

$$S := \alpha(t)\partial_t - \beta(t) \left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} \right),$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \beta(t) \sum_{j,\, l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \beta(t)\sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x),$$

де f – задана, а u – невідома функції. α і β є неперервними і невід'ємними на проміжку $[0,T]$ функціями, при цьому $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ для $t \in (0,T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$ та β є монотонно неспадною функцією. Виродження при $t = 0$ рівняння (1) породжується функціями α і β, які входять в це рівняння.

Виродження класифікуватимемо за допомогою значень інтегралів $A(T,0) := \int\limits_0^T \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}$ і $B(T,0) := \int\limits_0^T \frac{\beta(\theta)d\theta}{\alpha(\theta)}$. Так у випадку $A(T,0) < \infty$ рівняння (1) має слабке виродження. У випадку $A(T,0) = \infty$ виродження є сильним і дуже сильним, якщо $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$. Зауважимо, що задача Коші при $t = 0$ для рівняння (1) не завжди є коректно поставленою. Але можна говорити про фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1) в такому сенсі.

ФРЗК для рівняння (1) – це така функція $Z(t, x; \tau, \xi)$, $0 < \tau < t \leq T$, яка має за змінними t і x всі похідні, що входять у рівняння (1) і для будь-якого $\tau \in (0, T)$ та довільних неперервних і обмежених функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ вираз

$$(P\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \tag{2}$$

визначає в шарі $\Pi_{(\tau,T]}$ розв'язок однорідного рівняння (1) за початкової умови

$$u(t, x)|_{t=\tau} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

При цьому функція (2) задовольняє умову (3) у такому сенсі:

$$\lim_{t\to\tau} u(t, x) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Зауважимо, що прямування до границі $\varphi(x)$ в (4) рівномірне на кожному компакті простору $\mathbb{R}^n$.

Встановлено умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова з двома групами просторових змінних виродження, яке має ще виродження на початковій гіперплощині, за яких існує фундаментальний розв'язок задачі Коші, встановлено оцінки фундаментального розв'язку та породжуваного ним об'ємного потенціалу, а також доведено теореми про інтегральні зображення розв'язків і коректну розв'язність задачі Коші в класах вагових функцій. Ці результати наведені в праці [1].

1. *Voznyak O. G., Dron V. S., Medynskyi I. P.* Properties of fundamental solutions, correct solvability of the Cauchy problem and integral representations of solutions for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with three groups of spatial variables and with degeneration on the initial hyperplane // Mathematical Modelling and Computing. – 2022. – **9**, №3. – P.779–790.

CORRECT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC KOLMOGOROV-TYPE EQUATIONS WITH THREE GROUPS OF SPATIAL VARIABLES AND WITH DEGENERATION ON THE INITIAL HYPERPLANE

Some properties of the fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equation with three groups of spatial variables of degeneration with degeneration on the initial hyperplane and generated by it the volume potential are established. Theorems on integral representations of solutions and correct solvability of the Cauchy problem are presented. These results are obtained in appropriate classes of weight functions.