

УДК 517.956.4

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОБ'ЄМНОГО ПОТЕНЦІАЛУ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ГРУПІ МОЛОДШИХ ЧЛЕНІВ

Ігор Мединський¹, Галина Пасічник²

¹ Національний університет «Львівська політехніка»

² Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ihor.p.medynskyi@lpnu.ua, pasichnyk.gs@gmail.com

Розглядається ультрапараболічне рівняння типу класичного рівняння дифузії з інерцією А.М. Колмогорова з коефіцієнтами, сталими в групі старших і зростаючими в групі молодших його членів.

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$ – їх сума; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$. Змінні x_{11}, \dots, x_{1n_1} називаються основними, а x_{l1}, \dots, x_{ln_l} , $l \in \{2, 3\}$, – змінними відповідної групи вирождення.

Розглядаємо в шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ задачу Коші

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

$$u(t, x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Тут функції f і φ вважаються заданими, а функція u – шукана.

Для рівняння (1) у праці [3] знайдено в явному вигляді фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) та вивчено його властивості.

Використовуючи ці властивості разом з оцінками похідних ФРЗК, ми досліджуємо властивості породжених ФРЗК G об'ємних потенціалів вигляду

$$v(t, x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}.$$

Ці властивості описуються в термінах належності функції v та її похідних до спеціальних вагових $L_p^{k(t, \vec{a})}$ просторів у залежності від того, до якого простору належить густина потенціалу функція f . Розглянуто також випадок, коли функція f є обмеженою.

Враховуючи результати з праці [4] про властивості і оцінки інтегралів Пуассона, породжених ФРЗК G рівняння (1), отримано теореми про інтегральне зображення розв'язків задачі Коші (1), (2) та теореми про коректну розв'язність задачі Коші (1), (2). Тим самим для рівняння (1) реалізовано відомий підхід Ейдельмана–Івасишена [1, 2].

1. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // *Operator Theory: Adv. and Appl.* – 2004. – **152**. – 390 p.
2. *Івасишен С.Д.* Розв'язки параболічних рівнянь із сімейств банахових просторів, залежних від часу // *Мат. студії.* – 2013. – **40**, №2. – С. 172 – 181.
3. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – 2014. – Т.11, № 2. – С. 126–153.
4. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – 2015. – Т.12, № 2. – С. 205–229.

ON PROPERTIES OF VOLUME POTENTIAL FOR PARABOLIC EQUATION WITH GROWING LOWEST COEFFICIENTS

We consider a degenerate parabolic Kolmogorov type equation. Leading coefficients of this equation are constants and lowest ones are increasing functions. Properties of the volume potential generated by the fundamental solution of the Cauchy problem of such equations are established. These properties are used to establish the correct solvability of a Cauchy problem or a problem with a zero initial condition. Corresponding theorems about correct solvability are formulated in special weight L_p -spaces.