УДК 517.9

# УМОВИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ НЕЗАВЖДИ РОЗВ'ЯЗНИХ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

**Іванна Бондар**

*Інститут математики НАН України*

bondar.i@imath.kiev.ua

Досліджено розв'язність імпульсних систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Припускається, що імпульсна система не має розв'язку при довільних неоднорідностях. Для того, щоб звести її до розв'язної, введено функцію керування та встановлено критерій розв'язності й побудовано загальний його вигляд. Метод дослідження поставленої таким чином задачі використовує теорію псевдообернених (за Муром Пенроузом) матриць та ортопроекторів [1,2]. Розглянемо неоднорідну імпульсну систему інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x}(t) - \Phi(t) \int\limits_a^b \Big[A(s)x(s) + B(s)\dot{x}(s)\Big] ds = f(t) + \int\limits_a^b K(t,s) ds u, \quad t\epsilon[a,b], \quad (1)$$

$$\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} = S_i x(\tau_i - 0) + \gamma_i \in \mathbb{R}^{k_i}, \quad (i = 1,...,p, \quad \tau_i \in (a,b)). \qquad (2)$$

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у класі вектор-функцій $x(t)$ таких, що $x(t) \in D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I})$, $\dot{x}(t) \in L_2[a,b]$, $t \in [a,b]$, $\tau_i \in (a,b), i = 1,2,...,p$. Тут $D_2([a,b]\backslash_{\{\tau_i\}_I})$ — простір функцій $x : [a,b] \to R^n$, які допускають розрив I-го роду у точках $\tau_1,...,\tau_p \in (a,b)$ і абсолютно неперервні на кожному із проміжків $[a,\tau_1),[\tau_1,\tau_2),...,[\tau_p,b]$. Припускається, що $A(t), B(t)$ — $m \times n$, $\Phi(t)$ — $n \times m$, $f(t)$ — $n \times 1$ вимірні матриці, компоненти яких належать простору $L_2[a,b]$; вектор-стовпчики матриці $\Phi(t)$ — лінійно незалежні на $[a,b]$; $E_i$, $S_i$ — $k_i \times n$ вимірні матриці, $\gamma_i$ — $k_i$–вимірний вектор-стовпчик констант; $\operatorname{rank}(E_i + S_i) = k_i < n$, тобто роз'язок системи визначається однозначним продовженням через точку розриву: $\Delta E_i x\Big|_{t=\tau_i} := E_i(x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0))$. Припускаємо, що імпульсна ситема (1), (2) є нерозв'язна при $u = 0, u \in \mathbb{R}^n$ та довільних неоднорідностях $f(t) \in L_2[a,b]$, $\gamma_i \in R^{k_i}$. Для встановлення умов існування розв'язку імпульсної системи зведемо імпульсну умову до вигляду крайової умови,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_16.pdf використовуючи техніку запропоновану у [1]. Справедливим є наступне твердження.

**Теорема 1.** *Імпульсна система інтегро-диференціальних рівнянь* (1), (2), *яка при* $u = 0$ *та при довільних* $\forall f(t) \in L_2[a,b]$ *є нерозв'язною, буде мати розв'язок тоді і тільки тоді, коли виконується наступна умова*

$$P_{U^*} P_{D^*_{d_1}} = 0. \tag{3}$$

*При цьому величину керування* $u$ *необхідно вибрати наступним чином:*

$$u = U^+ P_{D^*_{d_1}} \tilde{b} + P_U c, \;\; c \in \mathbb{R}^n.$$

Тут $U := P_{D^*_{d_1}} \int\limits_a^b \Big[ A(s) \int\limits_a^s \int\limits_a^b K(\tau,s) ds d\tau + B(s) \int\limits_a^b K(s,\tau) d\tau \Big] ds$ — $d_1 \times n$-вимірна матриця, $U^+$ — псевдообернена (за Муром–Пенроузом) до $S$ — $n \times d_1$-вимірна матриця, $P_{U^*}$, $P_U$ — $d_1 \times d_1$ та $n \times n$-вимірні матриця (ортопроектор), відповідно.

**Зауваження.** При умові (3) керування $u \in \mathbb{R}^n$ може бути не єдиним, бо залежить від довільної сталої $P_U c \in \mathbb{R}^n$. Це дозволяє використати дане керування для дослідження задач, які часто зустрічаються у теорії оптимального керування.

*Публікація містить результати досліджень проєкту № 2020.02/0089 у 2023 році за рахунок грантової підтримки Національного фонду досліджень України.*

1. *Бойчук О.А., Головацька І.А.* Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 4. — С. 460 — 474.
2. *Бондар І.А.* Умови керування для незавжди розв'язних інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром та крайових задач для них // Буковинський математичний журнал. —- 2016. -— **4**, № 1–2. —- С. 13-–17.

## CONTROL CONDITIONS FOR NOT ALWAYS SOLVABLE IMPULSE SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

*The solvability of impulse systems of integro-differential equations with a degenerate kernel is investigated. It is assumed that the impulse system does not have a solution for arbitrary inhomogeneities. In order to reduce it to solvable, a control function was introduced, a solvability criterion was established, and its general form was constructed. The fact that the control may not be unique allows us to use it to study problems that are often encountered in the theory of optimal control. The general method of studying the problem posed in this way uses the theory of pseudo-inverse (by Moore-Penrose) matrices and ortho projectors.*