УДК 517.956.4

ВИРОДЖЕНІ ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ ТИПУ ДИФУЗІЇ З ІНЕРЦІЄЮ

Іван Буртняк, Ганна Малицька

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

Ми досліджуємо рівняння другого порядку з p-групами просторових змінних, де по $p-1$-групі змінних є виродження параболічності, по цих групах рівняння є гіперболічним [1]. Для цього класу рівнянь побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), встановлені оцінки похідних ФРЗК. Методом Леві побудовано ФРЗК для рівнянь зі змінними коефіцієнтами в еліптичній частині [3]. Зацікавленість такими рівняннями зумовлена їхнім використанням в економічній теорії, зокрема в теорії опціонів, та при дослідженні процесів ціноутворення деривативів. Аналітичні формули, що відображають функцію Ґріна, узгоджені з емпіричними даними і при практичному застосуванні адекватно відображають проходження процесів на фондових ринках. Таке подання дозволяє розрахувати ринкову вартість портфелю акцій, оцінити внутрішню волатильність на ринку в будь-який момент часу, а також проаналізувати динаміку фондового ринку [2].

Нехай $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p,\ p \in N, \sum_{j=1}^{p} n_j = n_0,\ x \in R^{n_0},\ x_j \in R^{n_j}$, $\xi_j \in R^{n_j},\ j = \overline{1,p},\ 0 < \tau < t \leq T < +\infty$. Розглянемо задачу

$$\partial_t u\,(t,x) - \sum_{j=1}^{p-1}\sum_{\mu=1}^{n_p-1} x_{j\mu}\partial_{x_{j+1\ \mu}} u\,(t,x) = \sum_{k,=1}^{n} \partial_{x_k} a_{kj}\,(t,x)\partial_{x_j} u(t,x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_k\,(t,x)\,\partial_{x_k} u\,(t,x) + a_0\,(t,x)\,u\,(t,x)\,, \qquad (1)$$

$$u\,(t,x)\,|_{t=\tau} = u_0\,(x)\,,$$

де $(t,x) \in \Pi_{[0,T]} = \{(x,t)\,,\ x \in R^{n_0},\ t \in [0,T]\}\,,\ u_0\,(x) \leq Ce^{a|x|^2}.$

Використаємо наступні умови.

I. $Re\ \sum_{k,j=1}^{n_1} a_k\,(t,x)\,(i\sigma_k)\,(i\sigma_j) \leq -\,\delta|\sigma_1|^2, \quad \forall\sigma_1,\ |\sigma_1| = 1,\ \delta > 0$ не залежить від $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$.

II. $a_{kj}\,(t,x)\,, \partial_{x_j x_k} a_k\,(t,x)\,,\ \partial_{x_j} a_{kj}\,(t,x)\,,\ \partial_{x_j} a_k\,(t,x)$– задовольняють рівномірну умову Гельдера по x з показником $0 < \alpha \leq 1,\ \forall\,(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_17.pdf

Теорема 1. *Якщо виконуються умови I, II, то задача Коші має ФРЗК* $G(t,x,\tau,\xi)$, $t>\tau$, $x\in R^{n_0}$, $\xi\in R^{n_0}$.

Якщо виконуються умови I, II та $x=\xi$, *то існує ФРЗК* $G(t,x,\tau,\xi)$, *який є цілою функцією за змінною* x *порядку спадання 2, причому справджуються оцінки:*

$$\left| D^m_{x_j}\ D^s_{x_i} G_0(t,x,\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-\sum_{j=1}^{p}\frac{(2j-1)ns+1}{2}}(t-\tau)^{-\sum_{j=2}^{p}\frac{(2j-1)m_j}{2}}$$

$$\exp\{-c\left(\sum_{k=1}^{p}(x_k-\xi_k+\sum_{j=1}^{k-1}x_j\frac{(t-\tau)^j}{j!})(t-\tau)^{-\frac{2k-1}{2}}\right)^2\}.$$

Похідні функції $G(t,x,\tau,\xi)$ *задовольняють рівномірну умову Гельдера порядку* α, $0<\alpha\le 1$, *за параметром* ξ.

Теорема 2. *При виконанні умов I, II рівняння* (1) *має ФРЗК* $\mathrm{E}(t,x,\tau,\xi)$. *Для цього розв'язку використовується рівність*

$$\mathrm{E}=G_0(t,x,\tau,\xi,\xi)+\int_\tau^t d\beta\int_{R^{n_0}} G_0(t,x,\beta,\gamma,\gamma)\varphi(\beta,\gamma,\tau,\xi)\,d\gamma,$$

де φ– *шукана функція, яка задовольняє відповідне рівняння Вольтерри I роду.*

Встановлено існування оцінок похідних, що входять у рівняння (1).

1. *Burtnyak I.V., Malyts'ka H.P.* On the fundamental solution of the Cauchy problem for Kolmogorov systems of the second order // Ukr. Math. J. – 2019. – **70**. – P. 1275–1287.
2. *Burtnyak I.V., Malytska H.P.* Taylor expansion for derivative securities pricing as a precondition for strategic market decisions // Problems and Perspectives in Management. – 2018. – **16**. – P. 224–231.
3. *Малицька Г.П., Буртняк І.В.* Побудова фундаментального розв'язку одного класу вироджених параболічних рівнянь високого порядку // Карпатські матем. публ. – 2020. – **12**, № 1. – С. 79–87.

DEGENERATED PARABOLIC EQUATIONS OF THE DIFFUSION TYPE WITH INERTIA

For a class of degenerate parabolic Kolmogorov-type equations with degeneration. In the article, using the modified Levy method, a Green's function we study the Cauchy problem, construct its fundamental solution, and establish the estimates for its derivatives.