УДК 517.928.2; 517.927

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ СТРУННОЇ СІТКИ З ЖОРСТКИМИ, АЛЕ ЛЕГКИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Геннадій Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка

hennadii.hrabchak@lnu.edu.ua; hrabchak_1999@yahoo.com

Нехай Γ – скінченний зв'язний компактний метричний граф, $V(\Gamma)$ – множина його вершин. Приймемо $\Gamma = \Gamma_0 \cup \big(\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_l\big) \equiv \Gamma_0 \cup \Gamma_L$, де Γ_L – незв'язний підграф Γ з l компонентами Γ_j. Ми вивчаємо асимптотику при $\varepsilon \to 0$ спектра і власних підпросторів крайової задачі

$$\big(\varkappa_\varepsilon u'_\varepsilon\big)' + \lambda^\varepsilon r_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma, \quad u_\varepsilon = 0 \text{ на } V_D, \tag{1}$$

$$\sum_{e\sim a} \varkappa_{\varepsilon,e}(a) u'_{\varepsilon,e}(a) = 0, \quad a \in V \setminus V_D, \tag{2}$$

де $\varepsilon \in (0;\ 1)$ – малий параметр; λ^ε – спектральний параметр; u_ε – власна функція класу $C^2(\Gamma)$, неперервна у всіх вершинах; $V_D \subset V(\Gamma_0)$, $V_D \cap V(\Gamma_L) = \varnothing$; $\varkappa_\varepsilon = \varepsilon\alpha$, $r_\varepsilon = p$ на Γ_0; $\varkappa_\varepsilon = \beta$, $r_\varepsilon = \varepsilon^\omega q$ на Γ_L, де $\omega > 0$, а α, β, p, q – гладкі і додатні на відповідних підграфах функції.

Задача (1)–(2) описує власні коливання пружної струнної сітки, що складається з двох частин із суттєво різними властивостями жорсткості, яку моделює функція $\varkappa_\varepsilon$, і густини – функція r_ε. Підграф Γ_L асоційований з l жорсткими, але легкими – з густиною $\varepsilon^\omega q$ – компонентами сітки.

Умова (2) є умовою Кірхгофа (аналог умови Неймана). Підсумовування виконується за ребрами e, інцидентними вершині a. Похідна в кінцевих точках ребер обчислюється в напрямі від вершини. В нашій моделі це умова балансу сил натягу.

Спектр задачі (1)–(2) дискретний, додатний, власні значення (в.з.) скінченнократні, з точкою згущення в нескінченності; існує повна, ортонормована в $L_2(r_\varepsilon, \Gamma)$ система власних функцій. Кожне в.з. з фіксованим номером є неперервною функцією параметра ε порядку $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $v_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\Gamma_0}$, $w_\varepsilon = u_\varepsilon|_{\Gamma_L}$. Асимптотику власних елементів шукаємо у вигляді $\lambda^\varepsilon \sim \varepsilon\mu + o(\varepsilon)$, $v_\varepsilon \sim v + o(1)$ на Γ_0 і $w_\varepsilon \sim w + w_1\varepsilon + o(\varepsilon)$ на Γ_L.

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_20.pdf

Одержуємо, що $w = c_j = \mathrm{const}$ на кожній жорсткій компоненті Γ_j, а для головних членів μ і v асимптотик маємо *граничну* спектральну задачу

$$(\alpha v')' + \mu p\, v = 0 \text{ на } \Gamma_0, \qquad v = 0 \text{ на } V_D,$$
$$\sum_{e\sim a\in V_{0j}} \alpha_e(a) v'_e(a) = 0, \qquad v = c_j \text{ на } V_{0j},$$

де $V_{0j} = V(\Gamma_0) \cap V(\Gamma_j)$. Їй відповідає оператор T в $L_2(p,\Gamma_0)$, але вона задана на Γ_0. Тому, використовуючи оператор Діріхле-Неймана, зводимо вихідну задачу до задачі на Γ_0. Їй відповідає сім'я самоспряжених операторів $T_\varepsilon(\mu)$ в $L_2(p,\Gamma_0)$, які, як і T, мають компактну резольвенту. Доведено *рівномірну резольвентну збіжність* при $\varepsilon \to 0$ сім'ї $T_\varepsilon(\mu)$ до T. Опираючись на це і відомі факти спектральної теорії збурень, доведено теореми збіжності.

Теорема 1. *Нехай* $\{\lambda_k^\varepsilon\}_{k=1}^{+\infty}$ *та* $\{\mu_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– власні значення задач* (1)–(2) *та граничної відповідно, занумеровані в порядку зростання з урахуванням кратностей. Тоді для будь-якого фіксованого* $k \in \mathbb{N}$ *величини* $\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon$ *збігаються до* μ_k *при* $\varepsilon \to 0$ *і* $|\varepsilon^{-1}\lambda_k^\varepsilon - \mu_k| \leqslant C\varepsilon$, C *не залежить від* ε.

Нехай μ – в.з. оператора T, а $V_\mu \subset L_2(p,\Gamma_0)$ – відповідний власний підпростір; $U_\mu \subset L_2(\Gamma)$ – підпростір продовжень функцій з V_μ на Γ_j відповідними сталими c_j; U_μ^ε – підпростір в $L_2(\Gamma)$, породжений власними векторами, які відповідають тим в.з. λ^ε задачі (1)–(2), для яких $\varepsilon^{-1}\lambda^\varepsilon \to \mu$ при $\varepsilon \to 0$; P_{U_μ}, $P_{U_\mu^\varepsilon}$ – ортопроектори в $L_2(\Gamma)$ на U_μ і U_μ^ε.

Теорема 2. *Нехай* μ *– довільна точка спектра оператора* T. *Тоді* $\|P_{U_\mu} - P_{U_\mu^\varepsilon}\| \leqslant C\varepsilon$. *Якщо* μ_k *і* v_k *– просте в.з. і відповідний в.в. оператора* T, *то в.в.* $u_{\varepsilon,k}$ *оператора* L_ε *збігається в* $L_2(\Gamma)$ *до функції* u_k, *яка є продовженням* v_k *за неперервністю відповідними сталими на підграфи* Γ_j *графа* Γ *і* $\|u_{\varepsilon,k} - u_k\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\varepsilon$. *Сталі* C *не залежать від* ε.

ASYMPTOTICS OF THE SPECTRUM OF EIGENVIBRATIONS OF A STRING NETWORK WITH STIFF BUT LIGHT-WEIGHT COMPONENTS

We study the asymptotic properties of eigenvalues and eigenfunctions of a singularly perturbed spectral problem for a second-order differential operator on a metric graph. In a mechanical interpretation, the problem models the proper vibrations of a network-like system of flexible elastic strings with finite numbers of stiff light-weight components. The leader terms of the asymptotic of eigenvalues and eigenfunctions are constructed. The justifications of the asymptotic approximations is based on the fact of the uniform resolvent convergence of a certain family of unbounded self-adjoint operators to the limiting operator and on some results of the spectral perturbation theory.