УДК 517.95

# ЗАДАЧА СТЕФАНА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

**Надія Гузик[1], Оксана Бродяк[1,2]**

[1]*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,*
[1,2]*Національний університет "Львівська політехніка"*

hryntsiv@ukr.net, brodyakoksana1976@gmail.com

В області з вільною межею $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h = h(t)$ – невідома функція, розглядається обернена задача одночасного визначення невідомих коефіцієнтів $b_1 = b_1(t)$, $b_2 = b_2(t)$ в одновимірному параболічному рівнянні з виродженням

$$u_t = t^\beta a(t)u_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, h(0)], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int_0^{h(t)} xu(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_5(t), \quad t \in [0,T]. \tag{6}$$

Відомо, що $a = a(t)$ – строго додатна неперервна функція, а виродження рівняння (1) спричиняє степенева функція $t^\beta$. Досліджується випадок слабкого виродження, коли $0 < \beta < 1$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_21.pdf

**Означення 1.** Під розв'язком задачі (1)–(6) розумітимемо набір функцій $(b_1, b_2, h, u) \in (C[0,T])^2 \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega}_T)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, що задовольняє рівняння (1) та умови (2)–(6).

У роботі встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі (1)–(6). Заміною змінних обернена задача (1)–(6) зводиться до коефіцієнтної оберненої задачі в області з фіксованами межами. За допомогою функції Гріна крайової задачі для рівняння теплопровідності отримано операторне рівняння, еквівалентне до цієї задачі. Існування його розв'язку встановлено на основі теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора.

Для доведення єдиності розв'язку вказаної задачі використано властивості розв'язків систем однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з ядрами, що мають інтегровні особливості.

Зауважимо, що отримано достатні умови існування та єдиності локального за часом розв'язку вказаної оберненої задачі.

## STEFAN PROBLEM FOR THE WEAKLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

*The problem considered in the paper combines three types of problem: coefficient inverse problem, problem with degenerations and free boundary problems. The aim of the paper is to establish the sufficient conditions of existence and uniqueness of the classical solution to inverse problem of identification of the minor coefficient in the degenerate parabolic equation in a free boundary domain. It is known that the minor coefficient of this equation is a linear polynomial with respect to space variable with two unknown time-dependent functions. The degeneration of the equation is caused by the power function at the higher-order derivative of unknown function. For this aim we use apparatus of the Green functions for the initial-boundary value problems for the parabolic equation, the Schauder fixed point theorem and properties of the solutions of the homogeneous integral Volterra equations. The case of weak degeneration is investigated.*