УДК 517.9

РАЦІОНАЛЬНА ФАКТОРИЗАЦІЯ ПОТОКІВ ТИПУ ЛАКСА НА СПРЯЖЕНОМУ ПРОСТОРІ ДО АЛГЕБРИ ЛІ ДРОБОВИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Оксана Гентош, Анатолій Прикарпатський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Краківський університет технологій

ohen@ukr.net, pryk.anat@cybergal.com

У статті [1] було введено алгебру Лі $\mathbb{A}_\alpha := \mathbb{A}_0\{\{D^\alpha, D^{-\alpha}\}\}$, яку утворюють дробові інтегро-диференціальні оператори у вигляді формальних рядів Лорана за оператором дробової похідної Рімана-Ліувілля $D^\alpha : A \to A$, $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ і $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, коефіцієнтами яких є елементи алгебри Лі інтегро-диференціальних операторів $\mathbb{A}_0 := A\{\{D, D^{-1}\}\}$, де $D : A \to A$ – оператор звичайної похідної, $A := W_2^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \cap W_\infty^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ – алгебра функцій, із стандартним комутатором $[.,.]$. На спряженому просторі $\mathbb{A}_\alpha^*$ до алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha$ відносно інваріантного скалярного добутку такого, що $(\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{b}_\alpha) := \int_{\mathbb{S}^1} \operatorname{res}_D(\operatorname{res}_{D_\alpha}(\mathrm{a}_\alpha \circ \mathrm{b}_\alpha D^{-\alpha}))dx$ для будь-яких $\mathrm{a}_\alpha, \mathrm{b}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha$, за допомогою дужки Лі-Пуассона, породженої $\mathcal{R}$-деформованим комутатором $[.,.]_\mathcal{R}$, та інваріантів Казимира $\gamma_n(l_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n+m_\alpha}\left(l_\alpha^{\frac{n}{m_\alpha}}, l_\alpha\right) \in \mathcal{I}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $n \in \mathbb{N}$, де m_α – порядок оператора $l_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^* \simeq \mathbb{A}_\alpha$, як гамільтоніанів була побудована ієрархія гамільтонових потоків типу Лакса:

$$dl_\alpha/dt_n = [(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+, l_\alpha], \quad t_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Тут $\operatorname{res}_{D_\alpha}$ і res_D позначають відповідно коефіцієнти при $D^{-\alpha}$ та D^{-1} у розвиненнях дробового і звичайного інтегро-диференціального операторів, символ "$\circ$" – множення дробових інтегро-диференціальних операторів, а нижній індекс "+" – проекцію дробового інтегро-диференціального оператора на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,+}$ (формальних поліномів за оператором D^α).

Розглянемо на $\mathbb{A}_\alpha^*$ ще одну ієрархію гамільтонових потоків типу Лакса:

$$d\tilde{l}_\alpha/d\tilde{t}_n = [(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \tilde{l}_\alpha], \quad \tilde{t}_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

для деякого елемента $\tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ порядку m_α та у випадку, коли $\tilde{t}_n = t_n$, $n \in \mathbb{N}$, отримаємо еволюційні рівняння для дробових диференціальних

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_23.pdf операторів $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ порядків $(m_\alpha + s_\alpha)$ і $s_\alpha \in \mathbb{N}$ відповідно, які задають раціональну факторизацію елементів $l_\alpha, \tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}^*_\alpha$ у вигляді:

$$l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}, \qquad \tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha. \tag{3}$$

Теорема 1. *При перетворенні Беклунда $P : (A_\alpha, B_\alpha) \mapsto (l_\alpha, \tilde{l}_\alpha)$, що діє за правилом* (3)*, система двох потоків типу Лакса* (1)-(2) *на прямій сумі $\mathbb{A}^*_\alpha \oplus \mathbb{A}^*_\alpha$ еквівалентна системі еволюційних рівнянь:*

$$\begin{aligned} dA_\alpha/dt_n &= (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ A_\alpha - A_\alpha(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \\ dB_\alpha/dt_n &= (\nabla\gamma_n(l_\alpha))_+ B_\alpha - B_\alpha(\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \end{aligned} \tag{4}$$

на декартовому добутку $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Система (4) *володіє нескінченною послідовностю законів збереження $H_n(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha)|_{l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}} = \gamma(\tilde{l}_\alpha)|_{\tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$.*

Процедура редукування системи (1)-(2) на орбіти коприєднаної дії абстрактної групи Лі $G_\alpha := \exp \mathbb{A}_\alpha$ з врахуванням перетворення Беклунда (3) дозволяє отримувати ієрархії інтегровних нелінійних дробово-диференціальних динамічних систем на алгебрі Лі $\mathbb{A}_0$. Квазікласична апроксимація [1] таких систем, при якій комутатор $[.,.]$ на алгебрі Лі $\mathbb{A}_\alpha$ перетворюється на комутатор на алгебрі Лі дробових символів, приводить до нових ієрархій інтегровних гідродинамічних систем типу Бенні.

1. *Hentosh O.Ye., Kyshakevych B.Yu., Blackmore D., Prykarpatski A.K.* New fractional nonlinear integrable Hamiltonian systems // Applied Mathematics Letters. -– 2019. – **88**. – P. 41–49.

RATIONAL FACTORIZATION OF THE LAX TYPE FLOWS ON THE DUAL SPACE TO THE LIE ALGEBRA OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS

For the Lax type Hamiltonian flows on the dual space to the Lie algebra of fractional integral-differential operators the rational factorization method which allows us to construct new integrable hierarchies of nonlinear fractional-differential dynamical systems on the Lie algebra of ordinary integral-differential operators and infinite sequences of their conservation laws is developed. The quasiclassical approximations of such hierarchies are shown to be new integrable hierarchies of hydrodynamic Benney type systems.