УДК 517.946

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ У ПРОСТОРАХ ЕКСПОНЕНЦІЙНОГО ТИПУ РЯДІВ ДІРІХЛЕ-ТЕЙЛОРА

Володимир Ільків, Наталія Страп, Ірина Волянська

Національний університет "Львівська політехніка"

ilkivv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua

Дана робота присвячена дослідженню умов коректної розв'язності задачі з нелокальними крайовими умовами для диференціально-операторного рівняння з частинними похідними у випадку однієї просторової змінної. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників і коректність забезпечується вибором області розгляду та накладанням додаткових умов на коефіцієнти рівнянь та параметри нелокальних умов.

В області $\mathcal{D} = [0,T] \times \mathcal{S}$, де $\mathcal{S}$ — область з множини $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $T > 0$, для диференціального рівняння з частинними похідними

$$Lu = \sum_{s_0+s_1 \le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

досліджено задачу з нелокальними умовами

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

де $B = zd/dz$, $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — задані функції змінної z.

Введено такі позначення: $\mathcal{N} = \{\nu_k \in \mathbb{R} \colon k \in \mathbb{Z}\}$ — множина попарно різних дійсних чисел, яку будемо називати спектром функцій, якщо вона немає скінченних точок скупчення, тобто $|\nu_k| \to +\infty$ при $|k| \to +\infty$, послідовність ν_k зростає при зростанні k, $\nu_0 = 0$ і $\nu_k/k > 0$, якщо $k > 0$; $\mathbf{W}\mathcal{N}$ — лінійний простір скінченних сум вигляду $P(z) = \sum_k P_k z^{\nu_k}$, де $z \in \mathcal{S}$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k \in \mathbb{Z}$.

Умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) встановлено у просторах експоненційного типу $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})$, де $\beta \colon [0,T] \to \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ —

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_28.pdf це банахів простір таких функцій $u = u(t,z)$, похідні $\frac{\partial^r u}{\partial t^r}$ яких визначені для $r = 0,1,\ldots,n$ формулою $\frac{\partial^r u}{\partial t^r} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^{\nu_k}$, і функції $t \mapsto \left\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta(t)}_{q-r}(\mathcal{S})}$ є неперервними на $[0,T]$, а квадрат норми функції u обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q,n}(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\right\|^2_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta(t)}_{q-r}(\mathcal{S})}.$$

Простір $\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q}(\mathcal{S})$, де $\beta \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$,— це гільбертів простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^{\nu_k}$ зі спектром $\mathcal{N}$, який отриманий поповненням множини основних функцій $\mathbf{W}\mathcal{N}$ за нормою $\|\psi\|_{\mathbf{E}\mathcal{N}^{\beta}_{q}(\mathcal{S})} = \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{\nu}_k^{2q} e^{2\tilde{\nu}_k\beta} |\psi_k|^2\Big)^{1/2}$, $\tilde{\nu}_k = \sqrt{1+\nu_k^2}$;

Доведено теорему єдиності та теореми існування розв'язку задачі у просторах рядів Діріхле-Тейлора. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників. У випадку однієї змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

1. *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наукова думка, 2002. – 416 с.
2. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників. // Укр. мат. журн. – 2006. – 58, № 12. – С. 1624–1650.
3. *Ільків В.С., Страп Н.І.* Нелокальна крайова задача для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю у просторах рядів Діріхле–Тейлора з фіксованим спектром. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 2. – С. 77–85.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATION IN SPACES OF EXPONENTIAL TYPE OF DIRICHLET-TAYLOR SERIES

The non-local boundary value problem for partial differential equations with the operator of the generalized differentiation $B = zd/dz$, which operate on functions of scalar complex variable z, are considered. A criterion for the unique solvability of these problems and a sufficient conditions for the existence of its solutions are established in the spaces of functions, which are Dirichlet-Taylor series. The uniqueness theorem and existence theorems of the solution of problem in these spaces are proved. Correctness after Hadamard of the problem is shown. It distinguishes it from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.