УДК 517.95

ПРО КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

Іван Савка

Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України

s-i@ukr.net

Нехай $\Omega = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ – одиничне коло, $\mathcal{D} = (-\alpha, \beta) \times \Omega$, де $\alpha, \beta > 0$. В області $\mathcal{D}$ розглянемо задачу спряження з багатоточковими умовами:

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_j \frac{\partial}{\partial x} \right) u_1 = 0, \quad (t,x) \in (-\alpha, 0) \times \Omega, \\ \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x} \right) u_2 = 0, \quad (t,x) \in (0, \beta) \times \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0_-} \frac{\partial^{j-1} u_1}{\partial t^{j-1}} = \lim_{t \to 0_+} \frac{\partial^{j-1} u_2}{\partial t^{j-1}}, \quad j = 1, \ldots, \theta, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u_1\big|_{t=t_j} = \varphi_j, \quad j = 1, \ldots, r, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u_2\big|_{t=t_{r+j}} = \varphi_{r+j}, \quad j = 1, \ldots, \ell, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

де $n, m, \theta, r, \ell \in \mathbb{N}$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ – попарно різні набори дійсних чисел, $-\alpha \le t_1 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < \ldots < t_{r+\ell} \le \beta$, $\theta + r + \ell = n + m$, $\varphi_j = \varphi_j(x)$ – задані функції, $u_1 = u(t,x)$ і $u_2 = u_2(t,x)$ – шукані розв'язки.

У загальному випадку дана задача є умовно коректною, а питання про існування розв'язків пов'язане з проблемою малих знаменників (див., наприклад [1]). Зокрема, для задачі (1)–(4) малими знаменниками будуть вирази вигляду

$$\delta(k) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n & -\mu_1 & \ldots & -\mu_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{\theta-1} & \ldots & \lambda_n^{\theta-1} & -\mu_1^{\theta-1} & \ldots & -\mu_m^{\theta-1} \\ e^{ik\lambda_1 t_1} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{ik\lambda_1 t_r} & \ldots & e^{ik\lambda_n t_r} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \ldots & e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & e^{ik\mu_1 t_\ell} & \ldots & e^{ik\mu_m t_\ell} \end{vmatrix}, k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_29.pdf

У статті [2] доведено коректну розв'язність аналогічної задачі до задачі (1)–(4) для однорідних рівнянь високого порядку, які можуть допускати факторизацію вигляду (1), у шкалі просторів Соболєва для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{r+\ell}$) векторів, складених з вузлів інтерполяції багатоточкових умов, тобто $(t_1, \ldots, t_{r+\ell})$. Однак питання про корекність такої задачі стосовно коефіцієнтів факторизації $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_m$ рівнянь (1) не розглядалось.

За допомогою метричного підходу у роботі встановлено оцінки знизу для малих знаменників задачі (1)–(4) вигляду

$$|\delta(k)| \geq C|k|^{-\gamma}, \quad C > 0, \gamma \in \mathbb{R},$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів факторизації, з яких випливає існування розв'язку задачі (1)–(4) у просторах Соболєва.

Отримані результати можна поширити на випадок, якщо кожен із вузлів $t_1, \ldots, t_{r+\ell}$ у багатоточкових умовах має кратність [3].

1. *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журнал. – 2006. – 58, № 12. – С. 1624–1650.
2. *Медвідь О.М., Савка І.Я., Тимків І.Р.* Задача спряження з багатоточковими умовами для мішаних рівнянь гіперболічного типу високого порядку // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2019. – № 1 (53). – С. 21–28.
3. *Савка І., Тимків І.* Задача лінійного спряження з багатоточковими умовами у випадку кратних вузлів для строго гіперболічних однорідних рівнянь високого порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 96–108.

ON THE CORRECTNESS OF THE CONJUGATE PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR FACTORIZED HIGHER ORDER EQUATIONS

In general, the problem (1)-(4) *is conditionally well-posed and its solvability is related to the problem of small denominators and may be unstable with respect to small variations in the coefficients of the problem and in the parameters of the domain. Using metric approach, we will discuss the conditions for the solvability of the problem in Sobolev spaces and prove estimates for small denominators for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m)$.