УДК 919.6

ПРО МЕТОД ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО РІВНЯННЯ СТОКСА

Ігор Борачок, Роман Хапко

Львівський національний університет імені Івана Франка

ihor.borachok@lnu.edu.ua, roman.chapko@lnu.edu.ua

Ми розглядаємо наближене розв'язування нестаціонарної задачі Стокса у двовимірних двозв'язних областях. Використовуючи метод Роте за часовою змінною, вихідна задача зводиться до послідовності стаціонарних неоднорідних задач, які повністю дискретизовані методом фундаментальних розв'язків (МФР).

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ – двозв'язна область, обмежена двома замкненими кривими $\Gamma_\ell \in C$, $\ell = 1, 2$ і нехай $T > 0$ – задана стала. Нестаціонарна задача Стокса полягає у знаходженні вектор-функції $\vec{u} : D \times (0, T] \to \mathbb{R}^2$ і скалярної функції $p : D \times (0, T] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_r}\Delta\vec{u} - \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \nabla p = 0 & \text{в } D \times (0, T], \\ \operatorname{div}\vec{u} = 0 & \text{в } D \times (0, T], \\ \vec{u} = \vec{f_\ell} & \text{на } \Gamma_\ell \times (0, T],\ \ell = 1, 2, \\ \vec{u}(\cdot, 0) = \vec{0} & \text{в } D, \end{cases} \tag{1}$$

де c_r – відоме число Рейнольдса, $\vec{f_\ell} : \Gamma_\ell \times (0, T] \to \mathbb{R}^2$, $\ell = 1, 2$ – відомі гладкі вектор-функції, для яких $\vec{f_\ell}(\cdot, 0) = \vec{0}$, $\ell = 1, 2$.
Розгляд задачі саме у двозв'язній області обумовлений подальшими планами наближеного розв'язування задач реконструкції недоступної межі та крайових умов на ній. Для часткової дискретизації задачі (1) по часовій змінній застосовуємо метод Роте (див. [2]). На рівновіддаленому поділі $t_k = (k+1)h$, $k = -1, \ldots, N-1$, $h = \dfrac{T}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ наблизимо шукані функції $(\vec{u}(\cdot, t_k), p(\cdot, t_k))$ елементами послідовності $(\vec{u}_k, p_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, які є розв'язками послідовності стаціонарних задач

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c_r}\Delta\vec{u}_k - \kappa^2\vec{u}_k - \nabla p_k = -\kappa^2\vec{u}_{k-1} & \text{в } D, \\ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 & \text{в } D, \\ \vec{u}_k = \vec{f}_{\ell,k} & \text{на } \Gamma_\ell,\ \ell = 1, 2, \end{cases} \tag{2}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_32.pdf

де $\kappa^2 = \dfrac{1}{h}$, $\vec{f}_{\ell,k} = \vec{f}_\ell(\cdot, t_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, $\ell = 1, 2$ і $\vec{u}_{-1} = \vec{0}$.

Для повної дискретизації задачі (2) використовуємо МФР (див. [1]). Апроксимуємо функції $\vec{u}_k$ і p_k лінійними комбінаціями звужень елементів фундаментальної послідовності для систем диференціальних рівнянь з (2)

$$\vec{u}_k(x) \approx \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{k-m}(x, y_j) \vec{\alpha}_{m,j}, \quad x \in D, \tag{3}$$

$$p_k(x) \approx \sum_{m=0}^{k} \sum_{j=1}^{n} \vec{e}(x, y_j)^\top \vec{\alpha}_{m,j}, \quad x \in D, \tag{4}$$

де 2×2 матриці $\mathbf{E}_k(x, y)$ – відомі елементи фундаментальної послідовності (див. [2]), $\vec{e}(x, y) = -\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{x - y}{|x - y|^2}$, $x \neq y$; $y_j \notin \overline{D}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – вибрані точки джерела, $n \in \mathbb{N}$ – кількість точок джерела; $\vec{\alpha}_{m,j} \in \mathbb{R}^2$, $m = 0, 1, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – невідомі коефіцієнти, які знаходимо за методом колокації із крайових умов Діріхле у (2). В результаті, отримуємо послідовність систем лінійних рівнянь, для $k = 0, 1, \ldots, N-1$, із рекурентною правою частиною

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_0(x_{\ell,i}, y_j) \vec{\alpha}_{k,j} = \vec{f}_{\ell,k}(x_{\ell,i}) - \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{k-m}(x_{\ell,i}, y_j) \vec{\alpha}_{m,j}, \tag{5}$$

для $i = 1, \ldots, \tilde{n}/2$, $\ell = 1, 2$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, $\tilde{n} \geq n$ – парна кількість точок колокації $x_{\ell,i} \in \Gamma_\ell$. Системи (5) розв'язуємо методом найменших квадратів. Наближений розв'язок у кожний момент часу t_k, $k = 0, \ldots N-1$ у будь-якій точці $x \in D$ знаходимо за формулами (3) та (4).

Здійснені чисельні експерименти підтверджують ефективність запропонованого підходу.

1. *Borachok I.* A method of fundamental solutions for heat and wave propagation from lateral Cauchy data / I. Borachok, R. Chapko, B.T. Johansson // Numerical Algorithms. – 2022. – **89**. – P. 431–449.
2. *Chapko R.* On the combination of Rothe's method and boundary integral equations for the nonstationary Stokes equation / R. Chapko // Journal of integral equations and applications. – 2001. – **13**. – P. 99–116.

ON THE METHOD OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS TO THE NONSTATIONARY STOKES PROBLEM

We consider numerical solution of the nonstationary Stokes problem in two dimensional double connected domains. Using the Rothe's method, the problem is reduced to a sequence of the stationary problems, which is fully discretized by the method of fundamental solutions.