УДК 517.95

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Володимир Ільків [1], Михайло Симотюк [2], Ярослав Слоньовський [1]

[1] *Національний університет «Львівська політехніка»,*
[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*

ilkivvv@i.ua, quaternion@ukr.net, yaroslav.o.slonovskyi@lpnu.ua

Нижче використовуватимемо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0,T)\times\Omega^p$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $D=(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_p)$, $Pol_{n,p}^{hom}$ – множина усіх однорідних поліномів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами.

Нехай $n\in\mathbb{N}$, а поліноми $A_j\in Pol_{j,p}^{hom}$, $j=1,\ldots,n$, є такими, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ многочлен

$$L(\lambda,ik)\equiv\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(ik)\lambda^j \tag{1}$$

має прості суто уявні корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$, причому $P_L(\xi)\cdot A_0(\xi)\neq 0$ для всіх $\xi\in\mathbb{R}^p$, $|\xi|=1$ (тут $P_L(\xi)$ – дискримінант многочлена $L(\lambda,\xi)$).

Умови коректності задачі Ніколетті для рівняння з частинними похідними типу Ейлера

$$L\left(t\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x)\equiv\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u+\sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D)u=0,\ (t,x)\in Q_T^p, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=t_j}=\varphi_j(x),\ j=1,\ldots,n,\ 1\le t_1<\ldots<t_n\le T,\ x\in\Omega^p, \tag{3}$$

пов'язані із властивостями таких характеристичних визначників [3]:

$$\Delta(k)=\det\left\|y_q^{(j-1)}(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^{n},\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

де $y_q(t,\vec{0})=\ln^{q-1}(t)$, якщо $k=\vec{0}$; $y_q(t,k)=t^{\lambda_q(k)}$, якщо $k\neq\vec{0}$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma09_34.pdf

Зокрема, при виконанні умови

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0, \tag{5}$$

задача (2), (3) має єдиний формальний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{j,k}\, y_q(t,k) \exp(ik,x), \tag{6}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$ у визначнику $\Delta(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1,\dots,n$.

Збіжність ряду (6) пов'язана із проблемою малих знаменників [3, 4]: визначники $\Delta(k)$ можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, і спричиняти розбіжність ряду (6). Тому актуальним завданням є встановлення оцінок знизу для визначника $\Delta(k)$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1,\dots,t_n) \in [1,T]^n$ нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega} \tag{7}$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції в умовах (3) є логарифмічно рівновіддаленими. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у [1, 2].

1. Ільків В. С., Симотюк М. М., Слоньовський Я. О. Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 1–2. – С. 65–79.
2. Матурін Ю. П., Симотюк М. М. Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2018. – 2, вип. 2 (33). – С. 100–108.
3. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
4. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.

METRIC ESTIMATES OF THE DETERMINANT OF THE NICOLETTI PROBLEM FOR THE EULER-TYPE EQUATION

The estimates from below are established for the characteristic determinant of the Nicoletti problem for an Euler-type partial differential equation. Partial case is considered when the interpolation nodes form a geometric progression.