АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

УДК 512.548.7

МАТРИЧНІ КВАЗІГРУПИ З ВЛАСТИВІСТЮ СХРЕЩЕНОЇ ОБОРОТНОСТІ

Алла Луценко

Донецький національний університет імені Василя Стуса

lucenko.alla32@gmail.com

Нехай K – довільне комутативне кільце з одиницею і $K^n = K \times \ldots \times K$. Групоїд $(K^n; f)$ є визначений рівністю

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}B + \overline{a}, \tag{1}$$

де $A, B \in M_n(K)$ і $\overline{a} \in K^n$ називається *матричною квазігрупою* над кільцем K, якщо квадратні матриці A, B оборотні; *унітарною матричною квазігрупою*, якщо існують квадратні матриці A, $B \in M_n(K)$ такі, що для всіх $\overline{x}$, $\overline{y} \in K^n$ виконується рівність

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}B. \tag{2}$$

Означення 1 [2]. Квазігрупа $(Q;\cdot)$ називається: *середньою, лівою та правою CIP квазігрупою*, якщо відповідно існують відображення ψ, υ, γ такі, що для всіх x, y виконуються рівності

$$\psi(x)\cdot yx = y; \quad yx\cdot y = \upsilon(x); \quad y\cdot xy = \gamma(x),$$

ψ, υ, γ називаються *лівою, правою* та *середньою функцією оборотності*.

Теорема [3]. *Нехай $(K^n; f, \overline{0})$ – унітарна матрична квазігрупа і (2) – її канонічний розклад, тоді:*

1) *$(K^n; f, \overline{0})$ є середньою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $B = A^{-1}$. Функція оборотності $\psi(\overline{x}) = -\overline{x}A^{-3}$;*
2) *$(K^n; f, \overline{0})$ є лівою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли $B = -A^2$.*

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_01.pdf

Функція оборотності $\upsilon(\overline{x}) = -\overline{x}A^3$ *;*

3) $(K^n; f, \overline{0})$ *є правою CIP квазігрупою тоді і тільки тоді, коли* $A = -B^2$. *Функція оборотності* $\gamma(\overline{x}) = -\overline{x}B^3$.

Повний опис квазігруп з властивостями оборотності за рівностями множин трансляцій наведено в праці [2]. Отримано дев'ять многовидів, які розподілені на три парастрофні орбіти: ліві, праві та середні квазігрупи з властивістю оборотності (IP), властивістю схрещеної оборотності (CIP) та властивістю дзеркальності. Повну класифікацію групових ізотопів з властивостями схрещеної оборотності подано в праці [3].

Оскільки всі дзеркальні квазігрупи є IP квазігрупами, то у класі матричних квазігруп достатньо розглянути дві парастрофні орбіти.

В праці [3] знайдено умови, коли матрична квазігрупа має властивість IP та CIP та знайдено вигляд матричних IP квазігруп.

Для матричних квазігруп з властивістю схрещеної оборотності отримано таке твердження.

Твердження 1. *Кожна матрична квазігрупа з властивістю CIP над кільцем K має вигляд:*

середня CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}A^{-1} + \overline{a}$
ліва CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A - \overline{y}A^2 + \overline{a}$
права CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = -\overline{x}B^2 + \overline{y}B + \overline{a}$
тристороння CIP	$f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x}A + \overline{y}A^{-1} + \overline{a}$, $A^3 = -I$

де A − *оборотна матриця над кільцем K;* $\overline{a} \in K^n$.

Наслідок 1. Якщо матрична квазігрупа з канонічним розкладом (1) має дві з трьох властивостей схрещеної оборотності: LCIP, RCIP, MCIP, то вона також має і третю властивість.

1. *Lutsenko A.V.* Classification of group isotopes according to their inverse properties // Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2020. – Вип. 13. – С. 48–62.
2. *Sokhatsky F., Lutsenko A.* Classification of quasigroups according to directions of translations II // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. – 2021. – **62**, No. 3. – P. 309–323.
3. *Сохацький Ф.М., Луценко А.В., Фриз І.В.* Побудова квазігруп з властивістю оборотності // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2021. – **64**, № 4. – С. 5–17.

MATRIX QUASIGROUPS WITH CROSS INVERSE PROPERTY

The conditions when a matrix quasigroup has the cross inverse property are considered. The form of one-sided and three-sided CIP quasigroups was found. Two-sided matrix CIP quasigroups do not exist.