УДК 512.64

ПРО ПОДІЛЬНІСТЬ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ НАД ПОЛЕМ

Володимир Прокіп, Орест Мельник, Ростислава Коляда

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет «Львівська політехніка»,
Українська академія друкарства

v.prokip@gmail.com, orest.m.melnyk@lpnu.ua, rostyslavakolyada@gmail.com

Нехай $F_{m,n}$ і $F_{m,n}[\lambda]$ – множини $(m\times n)$-матриць над полем F та кільцем многочленів $F[\lambda]$ відповідно, $0_{m,n}$ – нульова $(m\times n)$-матриця. Матриця $A(\lambda)\in M_{n,n}(F[\lambda])$, яку запишемо у вигляді $A(\lambda)=\sum_{i=0}^{r}A_i\lambda^{r-i}$, де $A_i\in F_{n,n}$, $i=0,1,\ldots,r$, називається регулярною многочленною матрицею степеня r, якщо $\det A_0\neq 0$ [1] і неособливою, якщо $\det A(\lambda)\neq 0$.

Очевидно, що для матриць $A(\lambda)\in F_{n,n}[\lambda]$ і $B(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ існують матриці $P(\lambda),Q(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ такі, що $B(\lambda)=A(\lambda)P(\lambda)+Q(\lambda)$, де $Q(\lambda)=0_{n,m}$, або $\deg Q(\lambda)<\deg A(\lambda)$. Якщо матриця $A(\lambda)$ є регулярною, то $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ визначені однозначно [1]. У загальному випадку $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ не завжди визначені однозначно. Нижче наведемо умови, за яких для матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ матриці $P(\lambda)$ і $Q(\lambda)$ визначені однозначно.

Теорема 1. *Нехай* $A(\lambda)=\begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{n,n-1}(\lambda) & a_n(\lambda) \end{Vmatrix}\in F_{n,n}[\lambda]$ – *неособлива нижня трикутна матриця і* $B(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$. *Тоді для матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda),Q(\lambda)\in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda)=A(\lambda)P(\lambda)+Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda)=0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $Q(\lambda)$ *є менші за степінь елемента* $a_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg\begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \dots & q_{km}(\lambda)\end{Vmatrix}<\deg a_k(\lambda),\ k=1,2,\ldots,n.$$

Наслідок 1. *Нехай* $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, $\det A(\lambda) \neq 0$, *і* $B(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. *Нехай, далі,* $W(\lambda) \in GL(n, F[\lambda])$ така, що $A(\lambda)W(\lambda) = H_A(\lambda)$ – *форма Ерміта матриці* $A(\lambda)$, *тобто*

$$H_A(\lambda) = \begin{Vmatrix} h_1(\lambda) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ h_{21}(\lambda) & h_2(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1}(\lambda) & h_{n2}(\lambda) & \dots & h_{n,n-1}(\lambda) & h_n(\lambda) \end{Vmatrix},$$

де $h_i(\lambda) \in F[\lambda]$ – *унітальні многочлени. Крім цього, якщо* $h_i(\lambda) = \text{const}$, *то* $h_{ij}(\lambda) = 0$, *і якщо* $\deg h_i(\lambda) \geq 1$, *то* $\deg h_{ij}(\lambda) < \deg h_i(\lambda)$ *для всіх* $1 \leq j < i \leq n$.

Тоді для $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *існує єдина пара матриць* $P(\lambda), Q(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$ *таких, що* $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$, *де* $Q(\lambda) = 0_{n,m}$ *або степені елементів* k*-го рядка матриці* $Q(\lambda)$ *менші за степінь елемента* $h_k(\lambda)$, *тобто*

$$\deg \begin{Vmatrix} q_{k1}(\lambda) & q_{k2}(\lambda) & \dots & q_{km}(\lambda) \end{Vmatrix} < \deg h_k(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Нехай $A(\lambda) \in F_{n,n}[\lambda]$, $B(\lambda) \in F_{m,m}[\lambda]$ і $C(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$. На підставі Теореми 1 та Наслідку 1 дістаємо умови, за яких для матричного рівняння $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ існує єдиний "мінімальний" розв'язок $X_0(\lambda)$, $Y_0(\lambda) \in F_{n,m}[\lambda]$, тобто такий, що на елементи матриць $X_0(\lambda)$ та $Y_0(\lambda)$ накладено певні обмеження (див. [2] – [5]). Зауважимо, що наведені вище твердження узагальнюються для матриць над областями елементарних дільників.

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – Москва: Физматлит, 2004. – 560 с.
2. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Proc. Camb. Phil. Soc. – 1969. – **65**. – P. 585–590.
3. *Feinstein J., Barness Y.* On the uniqueness minimal solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**. – P.131–134.
4. *Prokip V.M.* About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // Lobachevskii J. Math. – 2008. – **23**. – P. 186–191.
5. *Prokip V.M.* On the divisibility of matrices with remainder over the domain of principal ideals // Journal of Mathematical Sciences. – 2019. – **243**. – P. 45–55.

ON DIVISIBILITY OF POLYNOMIAL MATRICES OVER A FIELD

We give conditions under which for a nonsingular triangular polynomial $(n \times n)$*-matrix* $A(\lambda)$ *and a polynomial* $(n \times m)$*-matrix* $B(\lambda)$ *over a field* F *there exists a unique pair of polynomial* $(n \times m)$*-matrices* $P(\lambda)$ *and* $Q(\lambda)$ *over the field* F *such that* $B(\lambda) = A(\lambda)P(\lambda) + Q(\lambda)$. *Obtained results are applied to find special solutions of the Sylvester type matrix polynomial equation.*