

УДК 512.64

ПРО ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ КІЛЬЦЯМИ З ІНВОЛЮЦІЄЮ

Галина Зеліско

Львівський національний університет імені Івана Франка

zelisko_halyna@yahoo.com

Розглянемо лінійне матричне рівняння типу Ляпунова

$$AX + YA^\nabla = C, \quad (1)$$

де $A \in M_n(\mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ [1, 2].

Нехай $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Зобразимо

$$A = A_1 + A_2\sqrt{k}, \quad C = C_1 + C_2\sqrt{k}, \quad X = X_1 + X_2\sqrt{k}, \quad Y = Y_1 + Y_2\sqrt{k}. \quad (2)$$

Інволюцію ∇ уведемо в кільці матриць $M_n(\mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ так:

$$A^\nabla = (A_1 + A_2\sqrt{k})^\nabla = A_1^T - A_2^T\sqrt{k}. \quad (3)$$

Теорема 1. *Матричне рівняння (1), де матриці A, C, A^∇ визначені в (2), (3), має цілочисловий розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$\left\| \begin{array}{ccc} A_1 \otimes E_n & E_n \otimes A_1^T & c_1 \\ A_2 \otimes E_n & E_n \otimes (-A_2^T) & c_2 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} A_1 \otimes E_n & E_n \otimes A_1^T & 0 \\ A_2 \otimes E_n & E_n \otimes (-A_2^T) & 0 \end{array} \right\|,$$

де стовпці c_1 і c_2 мають вигляд

$$c_1 = \|\text{rov}_1(C_1), \dots, \text{rov}_n(C_1)\|, \quad c_2 = \|\text{rov}_1(C_2), \dots, \text{rov}_n(C_2)\|$$

еквівалентні над \mathbb{Z} .

Теорема 2. *Цілочисловий розв'язок $X_0, Y_0 \in M_n(\mathbb{Z})$ матричного рівняння (1), де $A, C \in M_n(\mathbb{Z}[\sqrt{k}])$ вигляду (2) єдиний тоді і тільки тоді, коли*

$$\det(A_1 \otimes A_2 + A_2 \otimes A_1) \neq 0.$$

Результати теорем 1 і 2 поширені на випадок, коли $k \equiv 1 \pmod{4}$.

Теорема 3. *Якщо в рівнянні (1) матриця $C \in \nabla$ -симетричною, тобто $C = C^\nabla$, то це рівняння не має єдиного розв'язку.*

Досліджується питання про існування та єдиність цілочислових розв'язків лінійного матричного діофантового рівняння

$$AX + A^\nabla Y = C$$

над квадратичним кільцем $Z[\sqrt{k}]$ з інволюцією (3).

1. *Ладзоришин Н.Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // *Мат. методи та фіз.-мех. Поля.* – 2015. – **58**, № 2. – С. 47–54.
2. *Любачевский Б.Д.* Факторизация симметрических матриц с элементами из кольца с инволюцией // *Сиб. мат. журн.* – 1973. – **14**, № 2. – С. 337-356.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTIONS OF LINEAR MATRIX EQUATIONS OVER QUADRATIC RINGS WITH INVOLUTION

Necessary and sufficient conditions for the existence and unity of integer solutions of linear matrix equations over quadratic rings with involution have been found. The unity of the solutions of such equations in the case of symmetry of their coefficients is studied.