УДК 512.64

ПОВНА СИСТЕМА ІНВАРІАНТІВ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ДЛЯ 3×3-МАТРИЦІ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ

Богдан Шаваровський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

bshavarovskii@gmail.com

Припустимо, що матриця $F(x)\in M(3,\mathbf{C}[x])$ має просту структуру, повний ранг та одиничний перший інваріантний множник. Тоді $F(x)$ напівскалярно еквівалентна (нск. е.) до матриці вигляду

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ a_3(x) & a_2(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix},\ \deg a_1<\deg\varphi_1,\ \deg a_2, \deg a_3<\deg\varphi_2, \qquad (1)$$

де 1, $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – інваріантні множники. Вважатимемо, що $\deg\varphi_1$, $\deg(\varphi_2/\varphi_1)>1$. Позначимо $\varphi_{12}(x):=\varphi_2(x)/\varphi_1(x)$, $a_2'(x):=a_2(x)/\varphi_1(x)$; M_1 і M_2 – множини коренів поліномів $\varphi_1(x)$ і $\varphi_{12}(x)$ відповідно. Очевидно, $A(x)$ можна вибрати так, що

$$\begin{Vmatrix} a_1(\alpha_0) & a_3(\alpha_0) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ для деякого } \alpha_0\in M_1. \qquad (2)$$

Доведено, що $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))$ при фіксованому α_0 не залежить від вибору $A(x)$ з класу нск. е. [1]. За умови $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)$ в [1] вказана повна система інваріантів матриці (1) відносно нск.е. Тут припускається інше – $(a_1(x),a_3(x),\varphi_1(x))\neq\varphi_1(x)$. Тоді матрицю $A(x)$ можна вибрати так, що

$$\begin{Vmatrix} a_1(\alpha_1) & a_3(\alpha_1) \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ для деякого } \alpha_1\in M_1. \qquad (3)$$

У [2] встановлено, що $(a_3(x),\varphi_1(x))$ за фіксованих α_0,α_1 класом нск.е. з $A(x)$ визначається однозначно. За умови $(a_3(x),\varphi_1(x))=\varphi_1(x)$ у праці [2] вказана повна система інваріантів матриці (1) відносно нск.е. Надалі припускатимемо, що $(a_3(x),\varphi_1(x))\neq\varphi_1(x)$. Тоді існує такий корінь $\alpha_2\in M_1$, що

$$a_1(\alpha_2)=a_3(\alpha_2)\neq 0. \qquad (4)$$

Для $A(x)$ з умовами (2)–(4) позначимо $\delta_A(x):=a_1(x)a_2'(x)-a_3(x)$ і розглянемо розбиття множин M_1, M_2:

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_08.pdf

$$M_1 = M_{11} \cup M_{12}, \ M_2 = M_{21} \cup M_{22}, \tag{5}$$

де $M_{11} = \{\alpha_i : a_3(\alpha_i) = 0\}$ $M_{21} = \{\beta_j : \delta_A(\beta_j) = 0\}$. Встановлено, що розбиття (5) множин M_1, M_2 за фіксованих $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ не залежать від вибору $A(x)$ з класу нск.е. Для $A(x)$ введемо позначення:

$$\pi_A(\gamma) := \begin{cases} (a_1(\gamma))^{-1}, \gamma \in M_{11}, a_1(\gamma) \neq 0, \\ a_2'(\gamma)(\delta_A(\gamma))^{-1}, \gamma \in M_{22} \end{cases},$$

$$\tilde{\pi}_A(\lambda) := \begin{cases} (a_2'(\lambda))^{-1}, \lambda \in M_{21}, a_2'(\lambda) \neq 0, \\ a_1(\lambda)(a_3(\lambda))^{-1}, \lambda \in M_{12}. \end{cases}.$$

Означення. Матриця $A(x)$ з умовами (2)–(4) називається *зведеною і орієнтованою за характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.

Теорема. *Для зведеної та орієнтованої за характеристичними коренями* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ *матриці* $A(x)$ (1) *за фіксованих значень* $\pi_A(\gamma_0) \neq 1$ *і* $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) \neq 1$ *наступні величини утворюють повну систему інваріантів відносно нск.е.*:

$a_1(\alpha_i)$ *для кожного* $\alpha_i \in M_{11}$;

$a_1(\alpha_j)(a_3(\alpha_j))^{-1}$ *для кожного* $\alpha_j \in M_{12}$;

$a_2'(\beta_k)$ *для кожного* $\beta_k \in M_{21}$;

$a_2'(\beta_l)(\delta_A(\beta_l))^{-1}$ *для кожного* $\beta_l \in M_{22}$;

$(\delta_A(\beta_l))^{-1} + (a_1(\alpha_2))^{-1}$ *для кожного* $\beta_l \in M_{22}$;

$(a_3(\alpha_j))^{-1} - (a_1(\alpha_2))^{-1}$ *для кожного* $\alpha_j \in M_{12}$.

Встановлені повні системи інваріантів відносно нск.е. для зведеної та орієнтованої за характеристичними коренями матриці $A(x)$ у випадках, коли фіксоване значення $\pi_A(\gamma_0) \neq 1$ і $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) = 1$ або фіксоване значення $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) \neq 1$ і $\pi_A(\gamma_0) = 1$, а також для випадку $\pi_A(\gamma_0) = 1$, $\tilde{\pi}_A(\lambda_0) = 1$.

1. *Shavarovskii B.Z.* Conditions of semiscalar Eeuivalence of one class 3x3 matrices of simple structure // Journal of Mathematics. – 2022. – **2022**. – Article ID 8395922, 13 p.
2. *Shavarovskii B.Z.* Oriented by Characteristic Roots Reduced Matrices in the Class of Semiscalarly Equivalent // Journal of Mathematics. – 2021. – **2021**. – Article ID 5592756, 6 p.

A COMPLETE SYSTEM OF INVARIANTS WITH RESPECT TO SEMI-SCALAR EQUIVALENCE FOR A 3X3-MATRIX OF A SIMPLE STRUCTURE

A complete system of invariants with respect to semiscalar equivalence is established for one class of matrices of simple structure.