УДК 517.5+515.12

КАНТОРВАЛИ ТА ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Дмитро Карвацький

Інститут математики НАН України

karvatsky@imath.kiev.ua

Нагадаємо, що коли $M \in 2^N$, або іншими словами $M \subseteq N$, то число

$$x = x\,(M) = \sum_{n \in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \tag{1}$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, \text{при} \quad n \in M, \\ 0, \text{при} \quad n \notin M, \end{cases}$$

називається *неповною сумою (підсумою) ряду*. Множина усіх чисел виду (1) позначається як $E(u_n)$ та називається неповною сумою відповідного ряду $\sum u_n$.

У роботах [1] та [2] встановлено, що множина неповних сум довільного збіжного додатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, гомеоморфною до множини Кантора або М-канторвалом (симетричним канторвалом).

На сьогоднішній день необхідні і достатні умови того, що множина неповних сум збіжного додатного ряду є канторвалом або є гомеоморфною до множини Кантора (з додатною мірою Лебега або нулевої міри Лебега та дробової розмірності Гаусдорфа-Безиковича) залишаються невідомими. Тому науковці розв'язують цю задачу для певних класів рядів (бігеометричних, мультигеометричних, рядів з узагальнених чисел Фібоначчі, рядів з певною умовою однорідності).

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = k_1 \sin x + \dots + k_m \sin x + \dots + k_1 \sin x^n + \dots + k_m \sin x^n + \dots, \tag{2}$$

де $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$ – фіксовані дійсні числа та $x \in (0,1)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_09.pdf

Позначимо $K = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$. При $0 < x < 1$ ряд (2) є збіжним, оскільки з нерівності $\sin x < x$ ми матимемо, що

$$K \sum_{n=1}^{\infty} \sin x^n < K \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{Kx}{1-x}.$$

Ми вивчаємо топологічні властивості множини $E(a_n)$ для ряду (2) залежно від значення параметрів $k_1, \ldots, k_m, x$.

Теорема 1. *Якщо ряд* (2) *задовольняє умову*

$$x \geq \frac{d}{K+d},$$

$$d = \max_{1 \leq j \leq m} d_j, \quad d_j = \frac{\pi}{2} k_j - k_{j+1} - k_{j+2} - \cdots - k_m,$$

то $E(a_n)$ є відрізком.

Теорема 2. *Якщо для ряду* (2) *існують натуральні числа n_0 та n^* такі, що кожне з чисел $n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+n^*$ може бути представленим у вигляді суми чисел $k_1, k_2, \ldots, k_m$ та параметр x задовільняє нерівність*

$$\frac{\pi}{2n^* + \pi} \leq x \leq \frac{2k_m}{K\pi + 2k_m},$$

то множина $E(a_n)$ є канторвалом.

Теорема 3. *Якщо для ряду* (2) *виконується умова*

$$x \leq \frac{l}{K+l},$$

$$l = \min_{1 \leq j \leq m} l_j, \quad l_j = \frac{2}{\pi} k_j - k_{j+1} - k_{j+2} - \cdots - k_m,$$

то $E(a_n)$ є множиною канторівського типу.

1. *Guthrie J. A., Nymann J. E.* The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
2. *Nymann J., Saenz R.* On a paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series // Colloq. Math. – 2000. – Vol. 83, № 1. – P. 1-4.

CANTORVALS AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

We study properties of the set of subsums for convergent series

$$k_1 \sin x + \cdots + k_m \sin x + \cdots + k_1 \sin x^n + \cdots + k_m \sin x^n + \ldots,$$

where $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ are fixed positive integers and $0 < x < 1$. Depends on parameter x this set can be a finite union of closed intervals or Cantor-type set or even Cantorval.