УДК 512.64

МАТРИЦІ ТА ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ГРУПИ ЗЕЛІСКА

Володимир Щедрик

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України ім. Я.С. Підстригача, Львів

shchedrykv@ukr.net

Нехай R – комутативне кільце елементарних дільників, $R^{n\times n}$ – кільце $n\times n$ матриць над R. Для матриці $A \in R^{n\times n}$ існують такі оборотні матриці P, Q, що

$$PAQ = \Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, 0, \ldots, 0),$$

де $\varphi_k \neq 0$, $k \leq n$, причому φ_i є дільником φ_{i+1}, $i = 1, \ldots, k-1$. Поставимо у відповідність матриці A її групу Зеліска:

$$\mathbf{G}_A := \{H \in \mathrm{GL}_n(R) \mid \exists S \in \mathrm{GL}_n(R) \quad \text{така, що} \quad H\,A = A\,S\} \leq \mathrm{GL}_n(R).$$

Дослідження цієї групи розпочалося в [1] у кільцях многочленних матриць за умови $A = \Phi$. Її структура та властивості у матричних кільцях над областями елементарних дільників вивчалася в [3]. Пропонована робота присвячена дослідженню матриць, групи Зеліска яких збігаються.

Теорема 1. *Виконується рівність* $\mathbf{G}_A = P^{-1}\mathbf{G}_\Phi P$.

Теорема 2. *Нехай матриці A та B асоційовані справа: $A = BU$, де $U \in \mathrm{GL}_n(R)$. Тоді* $\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_B$.

Теорема 3. *Нехай c є елементом комутативного кільця R і $A \in R^{n\times n}$. Якщо*

1) c не є дільником нуля, то $\mathbf{G}_A = \mathbf{G}_{Ac}$;

2) c є дільником нуля, то $\mathbf{G}_A \subseteq \mathbf{G}_{Ac}$.

Кільце R має стабільний ранг 1,5, якщо для кожної трійки a, b, $c \in R$, де $c \neq 0$, таких що $aR + bR + cR = R$ існує таке $r \in R$, що $(a + br)R + cR = R$.

Теорема 4. *Нехай*

$$A = P\Phi Q_A^{-1}, \Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1,\ \varphi_2),\ \varphi_1|\varphi_2, B = P\Psi Q_B^{-1}, \Psi := \operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2),\ \psi_1|\psi_2$$

– матриці над комутативною областю Безу стабільного рангу 1,5. Тоді

$$\mathbf{G}_\Phi \cdot \mathbf{G}_\Psi = P^{-1}\mathbf{G}_\Delta P, \quad \text{де } \Delta := \operatorname{diag}\left(1,\ \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \frac{\psi_2}{\psi_1}\right)\right).$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_12.pdf

Нехай $U(R)$ – група одиниць кільця R. Для кожного $m \in R\backslash\{U(R),0\}$ позначимо через R_m фактор-кільце R/mR. Для кожного розв'язного у R_m рівняння $ax = b$, де $a, b \in R_m$ позначимо через $\underset{\sim}{\frac{b}{a}}$ його твірний розв'язок (див. [2]). Нехай

$$\Phi := \operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, 0, \ldots, 0) \in R_m^{n\times n}, \tag{1}$$

де $\varphi_1|\varphi_2|\cdots|\varphi_k \neq 0$, $k \leq n$. Оскільки $\varphi_1|\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то на підставі Наслідку 1 [2] $\varphi_i = \underset{\sim}{\frac{\varphi_i}{\varphi_1}} \cdot \varphi_1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тоді

$$\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \underset{\sim}{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}\varphi_1, \ldots, \underset{\sim}{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}\varphi_1, 0, \ldots, 0) =$$

$$= I\varphi_1 \cdot \operatorname{diag}(1, \underset{\sim}{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}, \ldots, \underset{\sim}{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_1) = I\varphi_1\Psi,$$

де

$$\Psi = \operatorname{diag}(1, \underset{\sim}{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}, \ldots, \underset{\sim}{\frac{\varphi_k}{\varphi_1}}, \alpha_1, \ldots, \alpha_1), \tag{2}$$

і $\alpha_1 = \frac{m}{(m,\ f_1)} \in Ann(\varphi_1)$, де f_1 – прообраз елемента φ_1 в R.

Наступний результат показує, що за певних умов і у випадку коли елемент c є дільником нуля групи $\mathbf{G}_A$ і $\mathbf{G}_{Ac}$ збігаються.

Теорема 5. *Нехай* Φ *і* Ψ *– матриці вигляду* (1) *і* (2)*, відповідно. Вконується рівність*

$$\mathbf{G}_\Phi = \mathbf{G}_\Psi.$$

1. *Зелиско В.Р* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 12. – С. 14– 21.
2. *Bovdi V., Shchedryk V.* Generating solutions of a linear equation and structure of elements of the Zelisko group // Linear Algebra and its Applications. - 2021. - **625**. - P. 55-67. https://doi.org/10.1016/j.laa.2021.04.019.
3. *Shchedryk V.* Arithmetic of matrices over rings. - Kyiv: Akademperiodyka, 2021, 278 p. ISBN 978-966-360-430-5, https://doi.org/10.15407/akademperiodika.430.278

MATRICES AND RELATED ZELISKO GROUPS

The properties of the Zelisko group, that is, the matrices group that quasi-commute with a fixed matrix, are investigated.