УДК 512.64+512.55

# РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МАТРИЧНОГО РІВНЯННЯ $AX = YB$ У КІЛЬЦІ БЛОЧНО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ

**Наталія Джалюк, Василь Петричкович**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України*

nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Нехай $R-$ комутативна область головних ідеалів. Надалі використовуватимемо позначення із праці [2], у якій було встановлено взаємозв'язки між еквівалентністю матриць у кільці $M(n,R)$ та в його підкільцях $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$ блочно-трикутних та $M_{BD}(n_1,\ldots,n_k,R)$ блочно-діагональних матриць.

Еквівалентність блочних матриць використовується при дослідженні матричних рівнянь типу Сильвестра у добре відомому критерії Рота [4] розв'язності цих рівнянь. Критерій Рота було узагальнено багатьма авторами для матричних рівнянь Сильвестра та їх систем над різними кільцями. У праці [3] критерій Рота доведено для матричних рівнянь Сильвестра над комутативними кільцями головних ідеалів, а також втановлено зв'язок між еквівалентністю блочно-трикутної матриці з кількістю блоків більше двох і блочно- діагональної матриці з однаковими головними блочними діагоналями та існуванням розв'язку системи матричних рівнянь типу Сильвестра.

Нехай

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} \end{matrix} \right\| \in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R),$$

тобто $A$ є верхньою блочно-трикутною матрицею та її діагональні блоки $A_{ii} \in M(n_i,R), i = 1,\ldots,k,$ блоки над діагоналлю $A_{ij} \in M(n_i,n_j,R), i,j = 1,\ldots,k, i < j,$ а під діагоналлю – нульові блоки відповідних розмірів. $D(A) = \operatorname{diag}\{A_{11},\ldots,A_{kk}\}-$ головна блочна діагональ матриці $A$. Аналогічну структуру мають матриці $B$ та $D(B)$.

Нагадаємо, що матриці $A$ і $B$ називають еквівалентними у кільці $M(n,R)$, якщо існують оборотні матриці $P,\ Q \in GL(n,R)$ такі,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_13.pdf що $PAQ = B$. Якщо матриці $P,\ Q \in GL_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто є оборотними блочно-трикутними, або $P,\ Q \in GL_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$, тобто є оборотними блочно-діагональними, то матриці $A$ і $B$ називають еквівалентними у кільці $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-трикутних або у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$ блочно-діагональних матриць, відповідно. У статті [1] еквівалентність блочно-трикутної матриці $A$ та її головної блочної діагоналі $D(A)$ автори називають блочною діагоналізовністю матриці $A$.

У цій праці встановлено умови існування розв'язку матричного рівняння $AX = YB$, де $A,\ B-$ відомі, $X,\ Y-$ невідомі матриці відповідних розмірів у кільці блочно-трикутних матриць $M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

**Теорема 1.** *Нехай блочно-трикутні матриці $A$ і $B$ є блочно діагоналізовні. Тоді матричне рівняння $AX = YB$, де $X,\ Y-$ невідомі матриці відповідних розмірів, має розв'язок у кільці $GL_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$ тоді і тільки тоді, коли їхні головні блочні діагоналі $D(A)$ і $D(B)$ еквівалентні у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$.*

Вкажемо також умови існування розв'язку подібного типу системи матричних рівнянь.

**Теорема 2.** *Нехай головні блочні діагоналі $D(A)$ і $D(B)$ блочно-трикутних матриць $A$ і $B$ еквівалентні у кільці $M_{BD}(n_1, \ldots, n_k, R)$. Тоді якщо $(\det A_{ii}, \det B_{i+j,i+j}) = 1,\ i = 1, \ldots, k-1,\ j = 1, \ldots, k-i$, то система матричних рівнянь $\sum_{t=i}^{j} A_{it}X_{tj} = \sum_{s=i}^{j} Y_{is}B_{sj},\ i \le j, i, j = 1, \ldots, k$, має розв'язок.*


1. *Dmytryshyn A., Kågström B.* Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2015. – **36**, No. 2. – P. 580–593.
2. *Dzhaliuk N.S., Petrychkovych V.M.* Equivalence of matrices in the ring $M(n, R)$ and its subrings // Ukrainian Mathematical Journal. – 2022. – **73**, No.12. – P. 1865–1872.
3. *Feinberg R. B.* Equivalence of partioned matrices // J. Res. bur. Stand. Sect. – 1976. – **80**, No. 1. – P. 89–97.
4. *Roth W.E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No. 3. – P. 392–396.


## SOLVABILITY OF MATRIX EQUATION $AX = YB$ IN THE RING OF BLOCK TRIANGULAR MATRICES

*Necessary and sufficient conditions of solvability of matrix equation $AX = YB$ in the ring of block triangular matrices over principal ideals rings are established under the condition of block diagonalization of its coefficients. Conditions of solvability of system of matrix equations of a similar type are indicated also.*