УДК 512.55+512.64

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПАР МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМ КІЛЬЦЕМ $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

Наталія Ладзоришин, Василь Петричкович

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

natalja.ladzoryshyn@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com

Нехай $A_i, B_i \;\; i = 1,2$ — $n \times n$ матриці з елементами з квадратичного кільця $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$, $\mathcal{E}(a)$ — евклідова норма $a \in \mathbb{K}$. Пари матриць (A_1, A_2) і (B_1, B_2) називаємо (z,k)-еквівалентними, якщо існують така оборотня матриця S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і оборотні матриці Q_1, Q_2 над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що $A_1 = SB_1Q_1$, $A_2 = SB_2Q_2$. У [1, 2] відносно цієї еквівалентності для певних класів пар матриць (A, B) над квадратичним евклідовим кільцем з канонічними діагональними формами $D^A = diag(\mu_1^A, ..., \mu_n^A)$, $D^B = diag(\mu_1^B, ..., \mu_n^B)$, встановлено їх звідність до пари трикутних форм (T^A, T^B), тобто

$$T^A = SAQ_1 = \left\| \begin{matrix} \mu_1^A & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^A & \mu_2^A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}^A & t_{n2}^A & \cdots & \mu_n^A \end{matrix} \right\|, \tag{1}$$

де

$$t_{ij}^A = 0, \quad \text{якщо} \quad \mu_i^A = 1, \quad i,j = 1,...,n, \quad j < i, \tag{2}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^A) < \mathcal{E}(\mu_i^A), \quad \text{якщо} \quad t_{ij}^A \neq 0, \quad i,j = 1,...,n, \quad j < i, \tag{3}$$

і

$$T^B = SBQ_2 = \left\| \begin{matrix} \mu_1^B & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}^B & \mu_2^B & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n1}^B & t_{n2}^B & \cdots & \mu_n^B \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

де

$$t_{ij}^B = 0, \quad \text{якщо} \quad \mu_i^B = 1, \quad i,j = 1,...,n, \quad j < i, \tag{5}$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}^B) < \mathcal{E}(\mu_i^B), \quad \text{якщо} \quad t_{ij}^B \neq 0, \quad i,j = 1,...,n, \quad j < i. \tag{6}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_15.pdf

Пару матриць (T^A, T^B), де T^A і T^B матриці вигляду (1) і (4) з умовами (2), (3) і (5), (6), відповідно, називаємо стандартною парою пари матриць (A, B). Стандартні пари пар матриць визначаються неоднозначно.

Серед квадратичних кілець є евклідові квадратичні кільця, кільця головних ідеалів, які не є евклідовими, а також є квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів. Структура матриць над кожним із цих кілець суттєво відрізняється. Тому дослідження матриць, зокрема їх еквівалентностей, потребує окремого вивчення над кожним із них.

Розглянемо (z,k)-еквівалентність пар матриць (A, B) над квадратичним евклідовим уявним кільцем $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Число стандартних пар матриць над цим кільцем є скінченним. Ми встановлюємо оцінку числа стандартних пар для деякого класу пар матриць над цим квадратичним кільцем.

Нехай A і B — $n \times n$ матриці з елементами з квадратичного кільця $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Позначимо через $\mathbf{M}_{T^A}$ множину всіх матриць T^A вигляду (1) для яких виконуються умови (2), (3). Аналогічно, $\mathbf{M}_{T^B}$ — множина всіх трикутних матриць T^B вигляду (4) для яких виконуються умови (5), (6). Через $\mathbf{M}_{(T^A,T^B)}$ позначимо множину всіх пар матриць (T^A, T^B), де $T^A \in \mathbf{M}_{T^A}$, $T^B \in \mathbf{M}_{T^B}$.

Теорема 1. *Нехай $\mathcal{E}(detA) < 4$, $\mathcal{E}(detB) < 4$ і $(\mathcal{E}(detA), \mathcal{E}(detB)) = 1$. Тоді стандартною парою пари матриць (A, B) є кожна пара (T^A, T^B) із множини $\boldsymbol{M}_{(T^A,T^B)}$ і їх число є максимальним.*

1. *Ладзоришин Н. Б.* Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями // Карпатські матем. публ. – 2013. – **5**, № 1. – С.63—69.
2. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. – 2014. – **76**, No 3. – P. 38—48.

EQUIVALENCE OF PAIRS OF MATRICES OVER THE QUADRATIC RING $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$

The (z,k)-equivalence of pairs of matrices over the quadratic ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ is investigated. It is established that the number of standard forms of pairs of matrices over this ring is finite and given bounds for this number.