УДК 512.64

РОЗКЛАД ОБОРОТНОЇ МАТРИЦІ У ДОБУТОК ДВОХ МАТРИЦЬ ІЗ ЗАДАНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Андрій Романів

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5 [3]. Позначимо: $M_n(R)$ – кільце $n \times n$ матриць над R, $GL_n(R)$ – повна лінійна група. Згідно з теоремою 1 із [2] R є областю елементарних дільників [5]. Відомо, що кожна матриця D над R еквівалентна діагональній матриці:

$$D \sim \Psi = diag(d_1, \dots, d_n),$$

де $d_i | d_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Зауважимо, що символ " $\sim$ " позначає еквівалентність матриць, а позначення $a|b$ означає, що елемент a ділить елемент b. Матрицю $\Psi = diag(d_1, \dots, d_n)$ називають канонічною діагональною формою, а елементи $d_1, \dots, d_n$ – інваріантними множниками матриці D.

Нехай матриця $T \in M_n(R)$ зображена у вигляді добутку $T = DC$, де

$$T \sim \Gamma = diag(\gamma_1, \dots, \gamma_n), \;\; \gamma_i | \gamma_{i+1}, \;\; i = 1, \dots, n-1.$$

Розглянемо множину оборотних матриць

$$\mathbf{L}(\Gamma, \Psi) = \{L \in GL_n(R) \;\; | \;\; \exists L_1 \in M_n(R) : L\Gamma = \Psi L_1\}.$$

Ця множина називається породжуючою та була введена в роботі [7].

Одним з ефективних методів розв'язання матричних задач є зображення матриці у вигляді добутку кількох співмножників із заданими властивостями. У роботі [6] показано, що довільна оборотна матриця розкладається у добуток трьох трикутних матриць над комутативним кільцем Ерміта стабільного рангу 1. Пізніше, Х. Чен [4] узагальнив цей результат на некомутативний випадок. Розклад оборотної матриці другого порядку у добуток двох матриць з певних груп було отримано в [1]. В роботі [2] встановлено, що повна лінійна група розкладається у добуток трьох її підгруп, дві з яких є групи верхніх та нижніх унітрикутних матриць над комутативними областями Безу стабільного рангу 1,5.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_17.pdf

Нехай $A, B \in M_n(R)$ – неособливі матриці з канонічними діагональними формами

$$A \sim \mathrm{E} = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon),$$

$$B \sim \Delta = diag(1, \ldots, 1, \delta),$$

відповідно. Надалі символ (a, b) позначатиме найбільший спільний дільник елементів a та b.

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область Безу стабільного рангу 1,5, $S = \|s_{ij}\|_1^n \in GL_n(R)$. І нехай*

$$\Omega = diag(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

де $\omega_i \mid \omega_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, та $\mathrm{E} \mid \Omega$, $\Delta \mid \Omega$. Для того, щоб $SL_A = L_B$, де $L_A \in \mathbf{L}(\Omega, \mathrm{E})$, $L_B \in \mathbf{L}(\Omega, \Delta)$ необхідно та достатньо, щоб $(a, b) \mid s_{n1}$, де $a = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon, \omega_1)}$, $b = \frac{\delta}{(\delta, \omega_1)}$.

1. *Романів А., Щедрик В.* Найбільший спільний лівий дільник та найменше спільне праве кратне матриць другого порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – 9. – С. 269–284.
2. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1,5 та розкладність повної лінійної групи у добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – 69, № 1. – С. 113–120.
3. *Щедрик В. П.* Кільця стабільного рангу 1,5 // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 6. – С. 849–860.
4. *Chen H.* Rings related to stable range conditions. – World scientific, 2011. – Vol 11 – 680 p.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – 66. – P. 464–491.
6. *Nagarajan K., Devasahayam M., Soundararajan T.* Products of three triangular matrices over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 2002. – 348. – P. 1–6.
7. *Shchedryk V. P.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra and Discrete Math. – 2009. – 2. – P. 79–98.

DECOMPOSITION OF AN INVERTIBLE MATRIX IN THE PRODUCT OF TWO MATRICES WITH GIVEN PROPERTIES

The necessary and sufficient conditions to decomposition of an invertible matrix in the product of two matrices with given properties over Bezout domains of stable range 1,5 are established.