УДК 517.5+511.72

G–ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Микола Працьовитий, Ірина Лисенко, Юлія Маслова

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Інститут математики НАН України

prats4444@gmail.com, iryna.pratsiovyta@gmail.com, julia0609mas@gmail.com

Нехай g_0–фіксоване число з проміжку $(0;\frac{1}{2}]$, $g_1 \equiv g_0 - 1$; $A \equiv \{0;1\}$ – алфавіт; $L \equiv A \times A \times ...$ – простір послідовностей елементів алфавіту.

Теорема 1. *Для будь–якого числа $x \in [0;g_0]$ існує послідовність $(\alpha_n) \in L$ така, що*

$$x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k g_{1-\alpha_k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i}\right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \qquad (1)$$

Подання числа x рядом (1) називається його G–представленням, а символічний запис $\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ – G–зображенням.

Майже всі числа відрізка $[0;g_0]$ (за винятком зліченної множини) мають єдине G–зображення і називаються G–унарними, а числа зліченної всюди щільної множини мають два зображення (вони називаються G–бінарними). Має місце рівність: $\Delta^G_{c_1\ldots c_m 01(0)} = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 11(0)}$.

Специфічною особливістю G–зображення чисел є те, що оператор лівостороннього зсуву цифр зображення, означений рівністю

$$\omega(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$$

є неперервною функцією, а інверсор цифр

$$I(\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^G_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$$

є ніде не монотонною функцією необмеженої варіації.

Теорема 2. *Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то має місце формула взаємозв'язку G–зображення і класичного двійкового зображення*

$$\Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = \Delta^2_{0a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \qquad (2)$$

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \textit{коли } \alpha_1 = 0; \\ 1, & \textit{коли } \alpha_1 = 1; \end{cases} a_{n+1} = \begin{cases} \alpha_{n+1}, & \textit{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \textit{– парне}, \\ 1-\alpha_{n+1}, & \textit{коли } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \textit{– непарне}. \end{cases}$$

Теорема 3. *Якщо $g_0 = \frac{1}{2}$, то для будь–якого натурального числа a існує набір нулів та одиниць $(a_1, a_2, ..., a_n)$ такий, що*

$$a = 2^n + \sum_{k=1}^{n}[(-1)^{1+\sigma_k} a_k 2^{n-k}] \equiv (1a_1 \dots a_n)_G, \tag{3}$$

де $\sigma_1 = 0$, $\sigma_k = a_1 + ... + a_{k-1}$, причому таких наборів існує рівно два.

Теорема 4. *а) Якщо у G–зображенні натурального числа a більше цифр, ніж у G–зображенні натурального числа b, то $a \geq b$.*
б) Числа $a = (1a_1...a_{k-1}1a_{k+1}...a_n)_G$ і $b = (1a_1...a_{k-1}0b_{k+1}...b_n)_G$ перебувають у відношенні
1) $a \geq b$, якщо σ_k–непарне,
2) $a \leq b$, якщо σ_k–парне.

У доповіді описується геометрія зображення і розглядаються різні застосування G–зображення чисел у фрактальній геометрії, зокрема групи перетворень, що зберігають
а) хвости зображення чисел;
б) частоти цифр у зображенні числа;
в) фрактальну розмірність Гаусдорфа–Безиковича борелівських множин.

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // Ergod.Th. and Dynam. Sys. - 2004, 24. - P. 1-16.
2. *Pratsiovytyi M. V., Lysenko I. M., and Maslova Yu. P.* Group of continuous transformations of real interval preserving tails of G_2-representation of numbers // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 29(2020). Number 1. pp. 99-108.
3. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел і їх застосування. – К.: Наукова думка, 2022. — 316 с.
4. *Працьовитий М.В., Лисенко І.М., Маслова Ю.П., ТребенкоО.О.* G-зображення дійсних чисел і деякі його застосування // Нелінійні коливання, 2022. Том 25 № 4. – С.377-387.

G-REPRESENTATION OF REAL NUMBERS AND ITS APPLICATIONS

In the talk, we consider two-symbol encoding of real numbers from $[0; g_0]$ with bases of different signs $g_0 \in (0; \frac{1}{2}]$ and $g_1 \equiv g_0 - 1$:

$$[0; g_0] \ni x = \alpha_1 g_{1-\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\alpha_k g_{1-\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} g_{\alpha_i}\right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$$

and its applications in fractal geometry and theory of groups of transformations of sets.