УДК 511.176, 512.643.2

ПРО КОМБІНАТОРНІ ТОТОЖНОСТІ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ЧИСЛАМИ ЛЕОНАРДО

Тарас Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

taras.goy@pnu.edu.ua

Узагальнені числа Леонардо $\{\mathcal{L}_{k,n}\}_{n\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, задаються за допомогою рекурентного співвідношення [3]

$$\mathcal{L}_{k,0} = 1,\ \mathcal{L}_{k,1} = 1, \quad \mathcal{L}_{k,n} = \mathcal{L}_{k,n-1} + \mathcal{L}_{k,n-2} + k, \quad n \geq 2.$$

Розглянемо послідовність матриць Тьопліца–Гессенберга

$$A_n(a_0; a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

і відповідні визначники $D(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \det\big(A_n(1; a_1, a_2, \ldots, a_n)\big)$.

Ми досліджуємо деякі визначники Тьопліца–Гессенберга, елементами яких є числа $\mathcal{L}_{k,n}$. Наші дослідження є подальшим розвитком робіт [1, 2], де отримані аналогічні комбінаторні тотожності для чисел Фібоначчі і Люка, які задовольняють рекурентне співвідношення $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, $n \geq 2$, з початковими умовами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ і $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, відповідно.

Теорема 1. *Для $n \geq 2$ справджуються тотожності:*

$$\begin{aligned}
&D(-\mathcal{L}_{1,0}, -\mathcal{L}_{1,1}, \ldots, -\mathcal{L}_{1,n-1}) = 2(-1)^n F_{2n-2},\\
&D(\mathcal{L}_{1,2}, \mathcal{L}_{1,3}, \ldots, \mathcal{L}_{1,n+1}) = 2F_{n+1},\\
&D(\mathcal{L}_{1,3}, \mathcal{L}_{1,5}, \ldots, \mathcal{L}_{1,2n+1}) = 2F_{n+3},\\
&D(\mathcal{L}_{2,2}, \mathcal{L}_{2,4}, \ldots, \mathcal{L}_{2,2n}) = 3(-1)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor},\\
&D(\mathcal{L}_{4,2}, \mathcal{L}_{4,3}, \ldots, \mathcal{L}_{4,n+1}) = 5F_{3n-1},\\
&D(\mathcal{L}_{4,2}, \mathcal{L}_{4,4}, \ldots, \mathcal{L}_{4,2n}) = 10n - 5,\\
&D(\mathcal{L}_{5,2}, \mathcal{L}_{5,4}, \ldots, \mathcal{L}_{5,2n}) = 6L_{2n-1}.
\end{aligned}$$

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/ma10_20.pdf

Використовуючи формулу Труді [4, с. 214], формули з Теореми 1 можемо записати як тотожності, які включають суми добутків узагальнених чисел Леонардо та мультиноміальні коефіцієнти.

Теорема 2. *Для $n \geq 2$ справджується тотожності*

$$\sum_{\sigma_n = n} p_n(s) \mathcal{L}_{1,0}^{s_1} \mathcal{L}_{1,1}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{1,n-1}^{s_n} = 2F_{2n-2},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{1,2}^{s_1} \mathcal{L}_{1,3}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{1,n+1}^{s_n} = 2(-1)^n F_{n+1},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{1,3}^{s_1} \mathcal{L}_{1,5}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{1,2n+1}^{s_n} = 2(-1)^n F_{n+3},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{2,2}^{s_1} \mathcal{L}_{2,4}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{2,2n}^{s_n} = 3(-1)^{\lfloor \frac{3n-1}{2} \rfloor},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{4,2}^{s_1} \mathcal{L}_{4,3}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{4,n+1}^{s_n} = 5(-1)^n F_{3n-1},$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{4,2}^{s_1} \mathcal{L}_{4,4}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{4,2n}^{s_n} = (-1)^n (10n - 5),$$

$$\sum_{\sigma_n = n} (-1)^{|s|} p_n(s) \mathcal{L}_{5,2}^{s_1} \mathcal{L}_{5,4}^{s_2} \cdots \mathcal{L}_{5,2n}^{s_n} = 6(-1)^n L_{2n-1},$$

де $p_n(s) = \frac{|s|!}{s_1! \cdots s_n!}$, $|s| = s_1 + \cdots + s_n$, $\sigma_n = s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n$, *а підсумовування здійснюється для всіх цілих* $s_i \geq 0$, *які задовольняють діофантове рівняння* $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$.

1. *Goy T., Shattuck M.* Fibonacci–Lucas identities and the generalized Trudi formula // Notes Number Theory Discrete Math. – 2020. – № 26(3). – P. 203–217.
2. *Goy T., Shattuck M.* Fibonacci and Lucas identities using Toeplitz–Hessenberg matrices // Appl. Appl. Math. – 2019. – № 14(2). – P. 699–715.
3. *Kuhapatanakul K., Chobsorn O.* On the generalized Leonardo numbers // Integers. – 2022. – № 22. – #A48.
4. *Muir T.* The theory of determinants in the historical order of development, Vol. 3. – Dover Publications, 1960.

ON COMBINATORIAL IDENTITIES INVOLVING GENERALIZED LEONARDO NUMBERS

We investigate some families of Toeplitz–Hessenberg determinants the entries of which are generalized Leonardo numbers. Using Trudi's formula, these determinant formulas may be rewritten as identities involving sums of products of the generalized Leonardo numbers and multinomial coefficients.