УДК 539.3

ТОЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК ВІСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ПОРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Наталя Вайсфельд, Зінаїда Журавльова

Лондонський королівський коледж,
Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk, z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглядається поропружний шар, всередині якого розташовано циліндричне включення ($0 < r < 1, 0 < z < h$, де h – відношення товщини шару b до радіусу циліндричного включення a). Між шаром та циліндричним включенням виконуються умови ідеального контакту та непроникності [1]

$$u\big|_{r=1} = 0, \tau_{rz}\big|_{r=1} = 0, \left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=1} = 0 . \tag{1}$$

Тут і далі $u(r,z) = u_r(r,z)/a,\ w(r,z) = u_z(r,z)/a$ – безрозмірні переміщення твердого каркасу шару, $p(r,z)$ – безрозмірний тиск рідини у порах шару, $\tau_{rz}(r,z), \sigma_r(r,z), \sigma_z(r,z)$ – безрозмірні дотичне та нормальні напруження шару відповідно.

До верхньої грані шару прикладено навантаження, а нижня грань є в умовах зчеплення та проникності [2]

$$\sigma_z\big|_{z=0} = L(r), \tau_{rz}\big|_{z=0} = T(r), p\big|_{z=0} = P(r), r > 1 . \tag{2}$$

$$u\big|_{z=h} = 0, w\big|_{z=h} = 0, p\big|_{z=h} = 0 . \tag{3}$$

Потрібно знайти переміщення та напруження твердого каркасу та тиск рідини усередині шару, що задовільняють крайові умови (1) – (3) та рівняння вигляду [3]

$$\begin{cases} \dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)-\dfrac{1}{r^2}u\right]+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{2}{\kappa-1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}-\alpha\dfrac{\partial p}{\partial r}=0, \\ \dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial w}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\dfrac{2}{\kappa+1}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)-\alpha\dfrac{\kappa-1}{\kappa+1}\dfrac{\partial p}{\partial z}=0, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial p}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\dfrac{\alpha}{K}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(ru)+\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)-\dfrac{S_P}{K}p=0, \end{cases} \tag{4}$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ – стала Мусхелішвілі, μ – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт Біо, $S_P = S_p G$, $K = a^2 k / G$ – безрозмірні величини, G – модуль зсуву, S_p – запам’ятованість простору пор, k – коефіцієнт проникності.

Вихідну крайову задачу (1) – (4) зведено до одновимірної крайової задачі за допомогою інтегрального перетворення типу Вебера [4] за змінною r

$$\begin{bmatrix} u_\beta(z) \\ w_\beta(z) \\ p_\beta(z) \end{bmatrix} = \int_1^\infty \begin{bmatrix} u(r,z) \\ w(r,z) \\ p(r,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \\ X_0(r,\beta) \end{bmatrix} r dr \,, \qquad (5)$$

де $X_i(r,\beta) = J_i(\beta r) N_1(\beta) - N_i(\beta r) J_1(\beta)$, $J_i(r), N_i(r)$ – функції Бесселя першого та другого роду відповідно.

Крайова задача у просторі трансформант формулюється у векторному вигляді. Її аналітичний розв’язок побудовано за допомогою апарату матричного диференціального числення [5]. Застосування формули обернення інтегрального перетворення завершує побудову точного розв’язку вихідної задачі.

1. *Kubik J., Kachmaryk M., Chaplya E.* Methods for the Determination of the Characteristics of Porous Saturated Media // Materials Science. – 2001. – **37**. – P. 92–102.
2. *Nahirnyj T., Tchervinka K.* Mathematical Modeling of the Coupled Processes in Nanoporous Bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – **12**(3). – P. 196-203.
3. *Cheng A.H.-D.* Poroelasticity // Theory and applications of transport in porous media (Springer). – 2016. – **27**.
4. *Youngdahl C.K., Sternberg E.* Three-Dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body // Trans. ASME Journ. of Applied Mech. – 1966. – **33**, № 4. – P. 855–865.
5. *Попов Г.Я.* Точні розв’язки деяких крайових задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропринт, 2013. – 424 с.

EXACT SOLUTION TO AN AXISYMMETRIC PROBLEM OF POROELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL INCLUSION

An exact solution to the axisymmetric problem for a poroelastic layer with cylindrical inclusion is constructed with the help of Weber-type integral transform and matrix differential calculation.