

УДК 534.1

## МЕТОД СИМЕТРІЇ І АПРОКСИМАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Кирило Трапезон, Олександр Трапезон

*Національний технічний університет України  
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,  
Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України*

trapezon@ukr.net

Запропоновано нетрадиційні підходи до аналітичного розв’язання прикладних задач для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. В основу цих підходів покладено групові перетворення диференціальних рівнянь, в результаті чого стає можливою побудова симетрій цих рівнянь. Зокрема методом симетрій досліджено задачі про коливання пружних тіл різної геометрії або їх статичне деформування.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$(FW')' + k^2FW = 0, \quad (1)$$

де  $F(x)$  – задана функція (змінний коефіцієнт). Якщо  $W(x)$ ,  $k$  – власна функція та власне число відповідно, то (1) безпосередньо буде рівнянням поздовжніх чи крутильних коливань стрижня змінного поперечного перерізу, рівнянням крутильних коливань диска змінної товщини. До рівняння у формі (1) шляхом належних підстановок та заміни змінних можна звести багато інших рівнянь другого порядку. Якщо ввести співвідношення

$$W_1 = FW', \quad F_1 = 1/F, \quad (2)$$

то (1) можна перетворити в аналогічне рівняння

$$(F_1W_1)' + k^2F_1W_1 = 0. \quad (3)$$

Зрозуміло, що при застосуванні групи перетворень (2) забезпечується інваріантність рівнянь (1) та (3) і відповідно реалізуються їх симетрії через відповідну схему побудови розв’язків. В реальних ситуаціях диференціальні рівняння типу (1) зі змінними коефіцієнтами не піддаються точному розв’язку, через що досить часто використовуються наближені методи чи методи на основі рядів. Завдяки методу симетрій можна побудувати рівняння (1), яке має точний розв’язок при змінних коефіцієнтах функції  $F_i$  і їх число в загальному випадку є не обмеженим. Використовуючи цю властивість функцію  $F_i$

можна використати в якості апроксимуючої функції для будь-яких реальних ситуацій, які моделюються рівнянням виду (1). Для розв'язання реальних задач функція  $F_i$  замінюється апроксимаційною функцією за рахунок відповідного вибору сталих коефіцієнтів в цій апроксимаційній функції, при яких рівняння типу (1) має точний розв'язок. В якості прикладу запропонованого підходу можна навести розв'язок рівняння типу (1), яке описує крутильні коливання диску змінної товщини закріпленого по внутрішньому краю та вільного по зовнішньому краю. Функція  $F(x) = \exp(ax^2)$ , де  $a$  – коефіцієнт. Так, в роботі [1] для пошуку розв'язку рівняння (1) використано підходи на основі методу рядів і при  $a = -1$  отримано, що власне число на першій та другій формі коливань відповідно дорівнюють  $k_1 = 1,896554$  і  $k_2 = 4,849536$ . Використовуючи принципи та підходи методу симетрії та виконавши відповідний підбір апроксимаційної функції виду  $F_1 = 1 / \cosh^2 mx$ , де  $m = 1,085$ , знайдено, що власні числа на першій та другій формі коливань дорівнюють відповідно  $k_1 = 1,90909$  і  $k_2 = 4,835683$ . Крім цього, на основі методу симетрії, отримано аналітичний розв'язок рівняння (1):

$$W = -B[\lambda \cosh mx \sin \lambda x + m \sinh mx \cos \lambda x], \quad (4)$$

де  $\lambda = \sqrt{k^2 - m^2}$ . Порівнюючи отримані результати розв'язку задачі на власні значення для рівняння типу (1), де визначена функція  $F(x) = \exp(ax^2)$  з відповідними результатами на основі методу рядів, можна підкреслити несуттєву різницю – відповідно на 0,66% та 0,28%. Крім цього, варто відмітити, що отриманий розв'язок (4) є більш зручним для подальшого розрахунку напружень і побудови форм власних коливань, аніж співвідношення, яке отримано в [1] на основі рядів. Аналогічним чином можна отримати розв'язки задач теорії коливань чи статичного деформування пружних тіл (стрижнів, дисків, балок, пластинок), які моделюються диференціальними рівняннями зі змінними коефіцієнтами.

1. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen anwendungen. – Leipzig: Akademische verlagsgesellschaft, 1963. – 504 p.

#### METHOD OF SYMMETRY AND APPROXIMATION IN PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS

*A comparison of the results of solving the problem on the eigenvalues of the torsional vibrations of a disk of variable thickness, which were obtained on the basis of the method of series and group approaches, based on the concept of symmetry of differential equations, was carried out. It is shown that approaches based on the symmetry of equations with the introduction of an approximation function allow obtaining eigenvalues for the problem of oscillations of a disc of variable thickness in a more visual and convenient way.*