УДК 539.3

МАТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ПРО УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ КВАЗІКРИСТАЛІВ

Роман Кушнір, Ярослав Пастернак, Георгій Сулим

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

Волинський національний університет імені Лесі Українки

dyrector@iapmm.lviv.ua, iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua, gtsulym@gmail.com

Елементи конструкцій сучасного машино- та аерокосмічного будування все частіше виготовляють із не так давно відкритих матеріалів, що мають порівняно із традиційними (скажімо, металами, пластмасами тощо) низку нових унікальних властивостей. Зокрема, на даний час значний інтерес науковців зосереджений на дослідному вивченні та математичному моделюванні поведінки квазікристалічних тіл, що, з одного боку, вже мають дуже цікаві застосування і коло яких швидко зростає, а з іншого – їхню реакцію на суто механічні впливи слід описувати новими і відмінними від співвідношень теорії пружності анізотропних тіл залежностями [1].

Зокрема, конститутивні співвідношення лінійної теорії пружності для квазікристалічних матеріалів мають такий вигляд [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km} + R_{ijkm}w_{k,m}, \quad H_{ij} = R_{kmij}\varepsilon_{km} + K_{ijkm}w_{k,m}, \tag{1}$$

де σ_{ij} – фононні напруження; $\varepsilon_{ij} = \left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)/2$ – компоненти фононного тензора деформацій; H_{ij} – фазонні напруження; $w_{i,j}$ – фазонні деформації; C_{ijkm} – компоненти фононного тензора пружних сталих; K_{ijkm} – відповідні для фазонних пружних сталих; R_{ijkm} – сталі фононно-фазонної взаємодії.

У даній роботі з огляду на те, що згадані вище 4-валентні тензори з компонентами R_{ijkm}, C_{ijkm}, K_{ijkm} мають властивості симетрії $R_{ijkm} = R_{jikm}$, $C_{ijkm} = C_{jikm}$, $K_{ijkm} = K_{kmij}$ [1], конститутивні співвідношення (1) записано у такому компактному вигляді:

$$\tilde{\sigma}_{Ij} = \tilde{C}_{IjKm}\tilde{u}_{K,m}, \tag{2}$$

де

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{(i+3)j} = H_{ij}, \tilde{u}_i = u_i, \tilde{u}_{i+3} = w_i; \tilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm},$$
$$\tilde{C}_{ij(k+3)m} = R_{ijkm}, \tilde{C}_{(i+3)jkm} = R_{kmij}, \tilde{C}_{(i+3)j(k+3)m} = K_{ijkm}, \tag{3}$$

а запропонований розширений тензор $\tilde{C}_{IjKm}$ фононно-фазонних сталих є симетричним: $\tilde{C}_{IjKm} = \tilde{C}_{KmIj}$. Тут записані великими літерами індекси змінюються від 1 до 6, а малими – від 1 до 3.

З урахуванням (3) та рівнянь динаміки квазікристалів [1] у зображеннях Фур'є, диференціальне рівняння для отримання фундаментального розв'язку трансформанти усталеного руху квазікристалу $\tilde{U}_{KQ}$ матиме вигляд

$$\tilde{C}_{IjKm}\tilde{U}_{KQ,jm} + \omega^2 M_{IK}\tilde{U}_{KQ} = -\delta_{IQ}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \tag{4}$$

Тут ω – кругова частота; M_{IK} – компоненти матриці інертності.

Застосування до (4) перетворення Радона [2] з параметрами p, $\boldsymbol{\xi}$ дає

$$\Gamma_{IK}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{U}_{KQ} + \omega^2 M_{IK}\breve{U}_{KQ} = -\delta_{IQ}\delta(p - \boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{x}_0), \ \ \Gamma_{IK} = \tilde{C}_{IjKm}\xi_j\xi_m. \tag{5}$$

Його розв'язок знайдено у такому матричному вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\breve{\mathbf{U}} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\sqrt{\mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}\exp\left(\mathrm{i}\omega\sqrt{\mathbf{M}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}}|p|\right) - \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\delta(p). \tag{6}$$

Співвідношення (6) дає можливість знайти обернене перетворення Радона та записати фундаментальний розв'язок у вигляді інтеграла по поверхні одиничної сфери. На відміну від координатних [1], застосований підхід не накладає обмежень на особливості матеріальної симетрії квазікристалів і дозволяє отримати розв'язок для найзагальнішого випадку. Крім того, подання (6) дає змогу явно розділити динамічну (регулярну) та статичну (сингулярну) складові фундаментального розв'язку. Він є основою побудови інтегральних рівнянь, за допомогою яких можна розв'язувати конкретні задачі.

1. *Fan T.Y., Yang W., Cheng H., Sun X.H.* Generalized Dynamics of Soft-Matter Quasicrystals: Mathematical Models, Solutions and Applications. Second Edition. Singapore: Springer, 2022.
2. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelectroelasticity // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2016. – **64**. – P. 222–229.

MATRIX APPROACH FOR DERIVATION OF FUNDAMENTL SOLUTIONS OF TIME-HARMONIC ELASTICITY PROBLEMS FOR QUASICRYSTALS

In this study the constitutive and motion equations for quasicrystal solids are rewritten in a compact form, which is scalable and allows further matrix manipulations. In particular, the general fundamental solution in the frequency domain is obtained.