УДК 539.3

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД УЗГОДЖЕНИХ СІЧЕНЬ ДЛЯ ПЛАСТИН МІНДЛІНА З ВИРІЗАМИ

Ігор Ориняк, Кирило Даниленко

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com; k.a.danylenko@gmail.com

На сьогоднішній день найбільш розповсюдженим методом розрахунку пластин є чисельний метод скінчених елементів (МСЕ). Запропонований в цій роботі метод узгоджених січень (МУС) є можливою альтернативою. Відмінності полягають в наступному:
– МУС базується на сильній постановці (strong formulation) задачі (тобто розглядаються всі диференційні рівняння, що покладені в основу моделі пластини), на відміну від слабкої (weak), де розглядається варіаційна енергетична постановка;
– в якості основних в МУС розглядаються в кожному поперечному січенні кожного елемента 6 фізичних і геометричних параметрів: переміщення, два кути нахилу, два момента та поперечна сила (рис. 1), що дозволяє легко задовольнити довільні граничні умови, тоді, як в МСЕ використовуються лише переміщення та два кути;
– узгодження між сусідніми елементами в МУС відбувається по центру січення і забезпечує неперервність всіх 6 параметрів задачі, а в МСЕ ужгодження відбувається лише в сусідніх вершинах елементів по кінематичних параметрах (переміщеннях і кутах);
– в МУС основні параметри та формули подаються у вигляді розв'язків задач про згин та кручення прямої балки, тому сусідство пластини з балкою органічно враховується і не вимагає розробки спеціальних процедур, як в МСЕ.

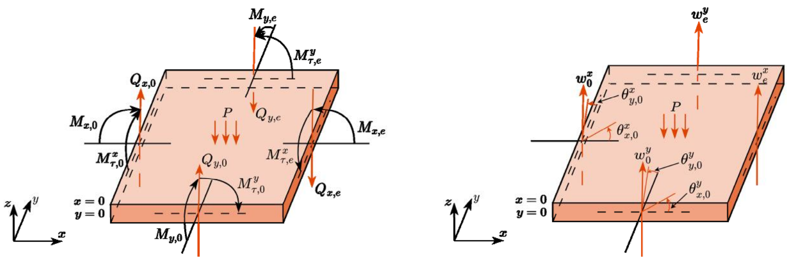

Рис. 1

Основу розв'язування МУС складають рівняння зв'язку, що дають наближений (сильний) розв'язок всіх диференційних рівнянь для всіх точок еле-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_18.pdf мента залежно від початкових (індекс «0»), якими є 6 параметрів на лівому краї, і наступні 6 – на правому. Вони записуються в наступному вигляді:

$$\begin{pmatrix} Z_1(x) \\ Z_2(x) \\ \dots \\ Z_6(x) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{1,1}(x); a_{1,2}(x); \dots a_{1,11}(x); a_{1,12}(x) \\ a_{2,1}(x); a_{2,2}(x); \dots a_{1,11}(x); a_{2,12}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{6,1}(x); a_{6,2}(x); \dots a_{6,12}(x); a_{6,12}(x) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,0} \\ Z_{2,0} \\ \dots \\ Z_{12,0} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \dots \\ b_6(x) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Це при русі зліва направо, де $Z_m(x)$ – 6 функцій-параметрів, що характеризують стан в кожному січенні $x = \text{const}$ і є фактично, тими ж самими параметрами, що $Z_{m,0}$, але уже, як функції від x, P – відоме навантаження на елемент. Очевидно, що рівняння (1) такі, що при $x = 0$ функції $a_{m,m}(0) = 1$, а всі інші $a_{m,k}(0) = 0$ та всі $b_m(0) = 0$.

Аналогічно отримуємо для інших 6 функцій-параметрів, що характеризують стан в $y = \text{const}$. Тут $c_{m,m+6}(0) = 1$, а інші $c_{m,k}(0) = 0$ та $d_m(0) = 0$.

$$\begin{pmatrix} Z_7(y) \\ Z_8(y) \\ \dots \\ Z_{12}(y) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{1,1}(y); c_{1,2}(y); \dots c_{1,11}(y); c_{1,12}(y) \\ c_{2,1}(y); c_{2,2}(y); \dots c_{1,11}(y); c_{2,12}(y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{6,1}(y); c_{6,2}(y); \dots c_{6,12}(y); c_{6,12}(y) \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,0} \\ Z_{2,0} \\ \dots \\ Z_{12,0} \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} d_1(y) \\ d_2(y) \\ \dots \\ d_6(y) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Рівняння звязку доповнюються рівняннями спряження (на границях між елементами) та граничними умовами. Подання у вигляді (1) та (2) дають змогу застосовувати метод початкових параметрів для організації обчислень, що значно зменшує кількість невідомих, як в методі граничних елементів.

Тестові обчислення показали надзвичайну стійкість методу: а) за довільних співвідношеннях між довжинами сторін елементів; б) за довільних співвідношень жорсткості різних елементів; в) за різного відношення довжини і товщини пластини. Метод уже при використанні 1 елементу демонструє задовільну точність, яка для балкових елементів є абсолютною.

NUMERICAL METHOD OF MATCHED SECTIONS IN APPLICATION TO MINDLIN PLATES WITH CUTOUTS

MMS is based on beam-like presentation of approximate plate solution based on strong formulation. The resulting formulas for each rectangular element are presented in transfer matrix method form, where the output parameters (6 parameters in $x = \text{const}$ sections as well as 6 in $y = const$) are related with 12 initial parameters – 6 at the left edge $x = 0$ and 6 at the lower edge $y = 0$. Numerical examples show the perfecr stability of method for various ratio between physical and geometrical parameters. The fair accuracy is attained even for mesh consisting from only 1 element, and tend to very good for small number of elements. Other advantage of MMS element is that it naturally conjugate with beam element.