

УДК 531.36, 531.38

## МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ ПРУЖНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА У ВИГЛЯДІ СИСТЕМИ ПРУЖНО ЗВ'ЯЗАНИХ ТВЕРДИХ ТІЛ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ

Юрій Кононов

*Інститут прикладної математики і механіки НАН України*

kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

Розглянута задача про моделювання обертання вільного пружного твердого тіла у вигляді системи двох і трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа у середовищі з опором. Динамічно симетричні тверді тіла  $S_i$  і  $S_{i+1}$  пов'язані в точці  $O_i$  пружним відновлювальним шарніром Гука. Тверде тіло  $S_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) знаходиться під дією дисипативного моменту  $M_i = D_i \omega$  ( $D_i = \text{diag}(D_{i1}, D_{i1}, D_{i3})$ ),  $D_{ij} > 0$ , що моделює середовище з опором, і дією постійного моменту  $M_{iq} = Q_i e_3^i$ , який спрямований вздовж осі симетрії тіл  $S_i$  і підтримує їх рівномірне обертання. Тут  $\omega$  – кутова швидкість твердих тіл  $S_i$ ;  $s_i = O_i O_{i+1}$ ;  $m_i$ ,  $c_i = O_i C_i^*$  і  $C_i^*$  – маса і центр мас тіла  $S_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ).

На основі роботи [1] характеристичне рівняння збуреного руху трьох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа має вигляд:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1 \lambda^2 - k_1 & \mu_2 \lambda^2 \\ \mu_1 \lambda^2 - k_1 & F_2 & \mu_3 \lambda^2 - k_2 \\ \mu_2 \lambda^2 & \mu_3 \lambda^2 - k_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\left[ a_5 \lambda^5 + (a_4 + ib_4) \lambda^4 + \dots + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 \right] \lambda = 0. \quad (1)$$

Тут  $F_i = A_i' \lambda^2 + (i \tilde{C}_i + D_i) \lambda + k_{i-1} + k_i$  ( $k_0 = k_3 = 0$ ),  $\tilde{C}_i = C_i \omega_0$ ,

$$A_1' = A_1 + m_1 m_{23} c_1^2 / m, \quad A_2' = A_2 + (m_2 m_{31} c_2^2 - 2 m_2 m_3 c_2 s_2 + m_3 m_{12} s_2^2) / m,$$

$$A_3' = A_3 + m_3 m_{12} c_3^2 / m, \quad \mu_1 = m_1 c_1 (m_2 c_2 + m_3 s_2) / m, \quad \mu_2 = m_1 m_3 c_1 c_3 / m,$$

$$\mu_3 = m_3 c_3 [m_1 s_2 + m_2 (s_2 - c_2)] / m, \quad m = m_1 + m_2 + m_3, \quad m_{ij} = m_i + m_j,$$

$\omega_0 = (Q_1 + Q_2 + Q_3) / (D_{13} + D_{23} + D_{33})$ . Наявність нульового кореня в рівнянні (1) відповідає обертанню системи трьох твердих тіл як єдиного цілого твердого тіла.

На підставі критерію Льєнара–Шіпара, записаного в іннерному вигляді, умови асимптотичної стійкості рівняння п'ятого ступеня (1) відносно квадрата кутової швидкості  $x = \omega_0^2$  мають вигляд:

$$I_{32}x + I_{30} > 0, \quad I_{53}x^3 + I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \\ I_{75}x^5 + I_{74}x^4 + \dots + I_{71}x + I_{70} > 0, \quad I_{96}x^6 + I_{95}x^5 + \dots + I_{91}x + I_{90} > 0, \quad (2)$$

а умови асимптотичної стійкості відносно коефіцієнта пружності шарніра  $k_i$  запишуться так:

$$I_{31}k_i + I_{30} > 0, \quad I_{53}k_i^3 + I_{52}k_i^2 + \dots + I_{51}k_i + I_{50} > 0, \\ I_{75}k_i^5 + I_{74}k_i^4 + \dots + I_{71}k_i + I_{70} > 0, \quad I_{97}k_i^7 + I_{96}k_i^6 + \dots + I_{91}k_i + I_{90} > 0 \quad (i=1,2). \quad (3)$$

Характеристичне рівняння збуреного руху двох пружно зв'язаних гіроскопів Лагранжа має вигляд

$$\left[ a_3 \lambda^3 + (a_2 + ib_2) \lambda^2 + (a_1 + ib_1) \lambda + a_0 + ib_0 \right] \lambda = 0, \quad (4)$$

де  $A'_1 = A_1 + \nu c_1^2$ ,  $A'_2 = A_2 + \nu c_2^2$ ,  $\mu = \nu c_1 c_2$ ,  $\nu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ ,  $k = k_1$ ,  $\mu = \mu_1$ , а умови асимптотичної стійкості відносно квадрата кутової швидкості  $x = \omega_0^2$  і коефіцієнта пружності шарніру  $k$  запишуться:

$$I_{32}x + I_{30} > 0, \quad I_{52}x^2 + I_{51}x + I_{50} > 0, \\ I_{31}k_i + I_{30} > 0, \quad I_{52}k_i^2 + I_{51}k_i + I_{50} > 0 \quad (i=1,2). \quad (5)$$

Знайдені умови при яких старші коефіцієнти нерівностей (2)–(3) та (5) додатні, розглянуто випадки малих і великих коефіцієнтів пружності шарнірів та випадок однакових твердих тіл. Проведено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості при відсутності дисипації.

*Дослідження виконані в рамках програмно-цільової та конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479).*

1. *Kononov Yu.M., Sviatenko Ya.I. Stabilization of Unstable Spinning of a Lagrange Gyroscope in a Resisting Medium by Another Spinning Gyroscope // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58, № 5. – P. 605–612.*

#### **SIMULATION OF ROTATION IN AN ENVIRONMENT WITH RESISTANCE OF AN ELASTIC RIGID BODY AS A SYSTEM OF ELASTICLY CONNECTED RIGID BODIES**

*The problem of modeling rotation in a medium with resistance of a free elastic solid body in the form of a system of three and two elastically coupled Lagrangian gyroscopes is considered. Gyroscopes are connected by elastic Hook hinges and are under the influence of dissipative moments and a constant moment, which ensures their uniform rotation. The conditions of asymptotic stability of the uniform rotation of the system of three and two solid bodies have been obtained. Analytical studies of stability conditions based on mass, inertial and elastic parameters of the mechanical system have been carried out. The case of no dissipation is considered.*