УДК 539.3

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЛЯ ТРЬОХ ВАРІАНТІВ ТЕОРІЇ ТОНКОСТІННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Ігор Ориняк, Гліб Юдін

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

igor_orinyak@yahoo.com, glibyudin@gmail.com

Найпоширенішим методом розв'язування задач про деформування циліндричних замкнутих оболонок є розклад невідомих в ряд Фур'є по коловій координаті, що зводить задачу до диференційного рівняння 8-го степеня, яке містить ненульові коефіцієнти при парних степенях. Його власні функції можуть бути представлені так [1]:

$$F_{1,2,3,4}\left(x\right)=e^{\mp a_n x}\begin{cases}\cos b_n x\\ \sin b_n x\end{cases},\quad \Phi_{1,2,3,4}\left(x\right)=e^{\mp c_n x}\begin{cases}\cos d_n x\\ \sin d_n x\end{cases}. \qquad (1)$$

Тобто вони характеризуються набором із чотирьох констант, значення яких в літературі представлені лише для спеціальних формулювань теорії оболонок.

Нами запропонований загальний підхід, що зводить зв'язану задачу оболонок до двох окремих відносно простих біквадратних задач – теорії пластин і теорії плоского тіла. Коли розглядається одна з них, то вважається, що власні числа визначаються лише нею (її біквадратним рівнянням), а друга задача використовується, щоб знайти лише її частковий розв'язок за відомого розв'язку першої задачі (права частина). Цей частковий розв'язок подається у вигляді лінійних комбінацій параметрів першої задачі, підставляється в першу задачу, де уточнюються коефіцієнти диференційного рівняння. Це приводить до ітераційного уточнення 4 власних функції $F_i(x)$ першої задачі. Аналогічно ітераційно отримуються власні функції $\Phi_i(x)$, коли, як основна, розглядається друга задача.

Розглядаються відмінності деяких популярних теорій, де в якості кривизн беруться вирази, наведені в Таблиці 1. Використовується: w, v та u – радіальне, колове та поздовжнє переміщення, R – радіус оболонки.

Таблиця 1 Три популярні варіанти запису кривизн в теорії оболонок

кривини	Теорія 1	Теорія 2	Теорія 3
χ_x	$-\partial^2 w/\partial x^2$	$-\partial^2 w/\partial x^2$	$-\partial^2 w/\partial x^2$
χ_ϕ	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)+\partial v/(R^2\partial\phi)$	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)-w/R^2$	$-\partial^2 w/(R^2\partial\phi^2)-w/R^2$
$\chi_{x\phi}$	$-2\partial^2 w/(R\partial\phi\partial x)+R^{-1}\partial v/\partial x$	$-2\partial^2 w/R\partial\phi\partial x-R^{-2}\partial u/\partial\phi+R^{-1}\partial v/\partial x$	$-2\partial^2 w/(R\partial\phi\partial x)$

Метод зручний тим, що не лише дає всі 8 власних функцій для різних варіантів теорії оболонок, але і дозволяє легко в процесі розв'язування визначати співвідношення між різними параметрами. Тобто, результатом є не лише власні функції, а і власні форми для всіх переміщень, кутів, сил і моментів.

Для демонстрації ефективності методу розглядається фундаментальна проблема дії зосередженої радіальної сили. Відомо, що така сила може бути розкладена в ряд Фур'є по коловій координаті, що зводить задачу до розгляду навантажень виду:

$$P_n(x,\varphi) = 2\delta(x)\cos(n\varphi) \tag{2}$$

Тут $\delta(x)$ є функція Дірака, а число n є круговою модою. Проведений розрахунок при різних n та відношеннях R/h, де h – товщина оболонки, показав, що найбільші відмінності спостерігаються при зменшенні відношення R/h. Тому нижче наведені результати тільки при $R/h = 20$. Результати порівнювалися між собою (для різних теорій) і результатами, отриманими нами раніше [2] при застосуванні різних методів аналітико-чисельного розв'язування диференційного рівняння 8-го степеня. Отримано, що подеколи (при великих значеннях n) значні відмінності між коефіцієнтами в рівнянні (1) [2] незначно проявляються в графіках розподілу радіальних переміщень та згинального моменту. Тому, звичайно, доцільніше порівнювати максимальні значення фізичних параметрів. Такі нормалізовані [2] значення в точці прикладення сили наведені в Таблиці 2 при $R/h = 20$.

Таблиця 2 Значення переміщень $w(0)$ та осьових моментів $M_x(0)$

n	$w(0)$			$M_x(0)$		
	Теор 1	Теор 2	Теор 3	Теор 1	Теор 2	Теор 3
2	1,864436	1,868084	1,857412	1,47831	1,47797	1,47496
5	0,194064	0,194338	0,193662	1,32397	1,32483	1,32187
10	0,026325	0,026338	0,026308	0,74276	0,7430	0,74241
20	0,003286	0,003286	0,003285	0,37378	0,37384	0,37375

Очевидно, що для практики вказані теорії є майже однаковими.

1. *Holand I.* Design of Circular Cylindrical Shells. Oslo University Press, Oslo, 1957.
2. *Orynyak I., Bai Y.* Coupled approximate long and short solutions versus exact Navier and Galerkin ones for cylindrical shell under radial load // Thin-Walled Structures. – 2022. – **170**. – 108536.

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR THREE VARIANTS OF THIN CYLINDRICAL SHELLS

We propose the decoupling iterative procedure for coupled problems on example of cylindrical shell, which is composed from plane task of elasticity and plate problem. The goal is to derive the eigenfunctions for different variants of shell problem. The comparison of fundamental solutions for radial point force reveals the very small difference between them, both for displacements and bending moments.