УДК 539.3

# ТОЧНИЙ РОЗВ’ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРА В ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРІ

**Наталя Вайсфельд, Юрій Процеров, Андрій Толкачов**

*Лондонський королівський коледж,*
*Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова*

natalya.vaysfeld@kcl.uc.ua, protserov@onu.edu.ua, andr.tolkach@gmail.com

В циліндричній системі координат розглядається пружний півнескінченний циліндр $0 \le r \le a, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z < \infty$, який розташовано у пружному півпросторі $0 \le r \le \infty, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le z < \infty$. Модуль зсуву та швидкість поперечних хвиль у пружному півпросторі ($i = 0$) та пружному циліндрі ($i = 1$) дорівнюватиме $G_i$, $c_i, i = 0,1$ відповідно. Між циліндром та півпростором наявні умови ідеального механічного контакту. Вважається, що до основи циліндра $z = 0$ прикладено осесиметричне дотичне навантаження кручення, яке гармонічно змінюється за часом. Потрібно визначити хвильові поля циліндра та півпростору, які описано диференціальними рівняннями кручення

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u_i}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{\rho^2}u_i + \frac{\partial^2 u_i}{\partial\zeta^2} = -\chi_i{}^2 u_i, \\ &i = 1: 0 \le \rho < 1, 0 < \zeta < \infty, \\ &i = 0: 1 < \rho < \infty, 0 < \zeta < \infty, \end{aligned} \tag{1}$$

де $u_j = u_j(\rho,\zeta)$, $j = 0,1$, $\chi_i^2 = a^2\omega^2 c_i^{-2}$, $j = 0,1$, $\rho = ra^{-1}, \zeta = za^{-1}$ – переміщення точок півпростора та циліндра відповідно у безрозмірних координатах, $\omega$ – частота коливань (множник $e^{i\omega t}$ тут і далі опущено). Крайові умови на основах півпростору та циліндру подано співвідношеннями:

$$\tau^1_{\zeta\varphi}\Big|_{\zeta=0} = \frac{G}{a}\frac{\partial u_i}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = g(\rho), \tau^0_{\zeta\varphi}\Big|_{\zeta=0} = \frac{G_0}{a}\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=0} = 0 \tag{2}$$

де $g(\rho)$ – задане навантаження. Умови спряження на поверхні контакту мають вигляд

$$u_1\big|_{\rho=1} = u_0\big|_{\rho=1}, \tau_{\rho\varphi}\big|_{\rho=1} = \tau^0_{\rho\varphi}\big|_{\rho=1} = f(\zeta), \tag{3}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_31.pdf де $f(\zeta)$ – невідома функція.

За допомогою півнескінченного $\cos-$ перетворення Фур'є

$$\langle u_{i\alpha}(\rho), f_\alpha \rangle = \int_0^\infty \langle u_i(\rho,\zeta), f(\zeta) \rangle \cos\alpha\zeta d\zeta$$

поставлена задача (1)-(3) зводиться до одновимірних крайових задач, розв'язок яких має вигляд

$$u_{1\alpha}(\rho) = \frac{aI_1(q_1\rho)}{G_1 q_1 I_2(q)} f_\alpha + \frac{a}{G_1}\int_0^1 \left[\Phi_\alpha(\rho,\eta) - \frac{K_2(q)}{I_2(q)} I_1(q_1\rho) I_1(q_1\eta)\right] g(\eta)\eta d\eta,$$

$$u_{0\alpha}(\rho) = -\frac{aK_1(q_0\rho)}{G_0 q_0 K_2(q_0)} f_\alpha, \text{ де } \Phi_\alpha(\rho,\eta) = -\begin{cases} I_1(q_1\eta)K_1(q_1\rho), 0 \le \eta < \rho \le 1 \\ I_1(q_1\rho)K_1(q_1\eta), 0 \le \rho < \eta \le 1 \end{cases}$$

$q_1 = \sqrt{\alpha^2 - \chi_1^2}, q_0 = \sqrt{\alpha^2 - \chi_0^2}$, $I_n(x), K_n(x)$ – модифіковані функції Бесселя.

З умови спряження знайдемо трансформанту шуканої фінкції $f(\zeta)$:

$$f_\alpha = \frac{q_0 K_2(q_0)}{q_0 I_1(q_1) K_2(q_0) + G^* q_1 I_2(q_1) K_1(q_0)} M(q_1), M(q_1) = \int_0^1 g(\eta) I_1(q_1\eta)\eta d\eta,$$

$G^* = G_1 G_0^{-1}$. Підстановка трансорманти $f_\alpha$ у вирази для переміщень та застосування подальшого оберненого перетвореняя Фур'є завершує побудову формул переміщень. Точні розв'язки містять інтеграли від багатозначних функцій. Для їх обчислення пропонується схема контурного інтегрування [1].

Аналогічні подання отримано для переміщень $u_j(\rho,\zeta), j = 0,1$.

1. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 281 с.

**EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM ON TORSIONAL OSCILLATIONS OF A CYLINDER IN AN ELASTIC HALF-SPACE**

*An elastic semi-infinite cylinder is located in an elastic half-space with another shear module and speed of transverse waves. Ideal mechanical contact conditions are executed a long the cylindrical surface. It is assumed that an axisymmetric tangenti al torsional load is applied to the base of the cylinder and varied harmonically with time. It is necessary to determine the wave field of the cylinder and half-space. The method of Fourier's transforms is applied to the boundary valued problem. The solution is constructed in obvious form. It allows to investigate the stress field of cylinder and external matrix on a load's frequency, type of load and ratio of wave's speeds.*