УДК 539.3

ЗНАХОДЖЕННЯ ФІЗИЧНО ОБҐРУНТОВАНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Віктор Ревенко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

victorrev@ukr.net

Розглянуто систему рівнянь Нав'є тривимірної статичної теорії термопружності в декартовій системі координат: $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{1}$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $e = \operatorname{div} \mathrm{u}_j$. Вважатимемо, що в тілі задане стаціонарне температурне поле $\nabla^2 T = 0$ [1].

Проаналізовано відомі часткові розв'язки системи рівнянь (1), при побудові яких не використовується термопружний потенціал переміщень [1]. Із цих розв'язків і фізичних міркувань випливають такі закономірності розподілу температурних переміщень: вони накопичуються по інтегральному закону; якщо температура є лінійною функцією, то вони повинні збігатися з відомими переміщеннями; якщо температуру спрямувати до нуля, то вони повинні збігатися до нуля. На основі цих тверджень знайдено новий частковий розв'язок системи рівнянь (1), який явно визначається температурою

$$u_j^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j} + \beta_1 \Omega_j, \ \ j = \overline{1,3}, \tag{2}$$

де $\vartheta(x,y,z) = \beta(x\Omega_1 + y\Omega_2 + z\Omega_3)$ – бігармонічна функція, $\beta = -\alpha/6$, $\beta_1 = 4\alpha/3$, $\Omega_j = \int \mathrm{T} dx_j$, T – тривимірні гармонічні функції. Інтеграли Ω_j означені так, що вони є гармонічними функціями, які дорівнюють нулю, коли температура рівна нулю.

На основі переміщень (2) визначено температурні напруження

$$\sigma_j^t = 2G\{\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\alpha T\}, \ \ \tau_{jm}^t = 2G\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_j \partial x_m} + \beta_1 G[\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_m} + \frac{\partial \Omega_m}{\partial x_j}]. \tag{3}$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me01_45.pdf

Знайдено формули, які визначають в простому вигляді об'ємне розширення і суму нормальних напружень (3) часткового температурного розв'язку рівнянь Нав'є (1)

$$e^t = \operatorname{div} u_j^t = 3\alpha T , \ \Theta^t = \sigma_1^t + \sigma_2^t + \sigma_3^t = 0 . \tag{4}$$

Побудовані часткові розв'язки системи рівнянь (1), коли температура є парною або непарною двовимірною функцією.

Виражено загальний розв'язок системи рівнянь термопружності (1) через чотири гармонічні функції.

Розглянуто систему рівнянь Нав'є (1) у випадку осесиметричної температури. Знайдено її частковий розв'язок

$$u_r^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + 2\beta_1 \Omega_r , \ u_z^t = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \beta_1 \Omega_z , \ u_\phi^t = 0 , \tag{5}$$

де $\Omega_r = \frac{1}{r}\int rTdr$, $\Omega_z = \int \mathrm{T}dz$ – двовимірні гармонічні осесиметричні функції, $\vartheta(r,z) = \beta(2r\Omega_r + z\Omega_z)$. На основі співвідношень (5) побудовані напруження.

Встановлено, що: в осесиметричному випадку також будуть справедливі співвідношення (4); при використанні термопружного потенціалу переміщень потрібно враховувати, що він містить в собі пружні переміщення.

Розроблено аналітично-числову методику розв'язання крайових задач термопружності за дії температурних навантажень.

1. *Revenko V.* Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Scientific Journal of TNTU. – 2022. – **108,** № 4. – P. 64–73.

FINDING OF PHYSICALLY REASONABLE SOLUTIONS OF EQUATIONS OF THE THERMOELASTICITY THEORY

The report found new solutions to the static theory of thermoelasticity in the Cartesian coordinate system. New explicit partial solutions of thermoelasticity equations, when the temperature field is defined by 3D or 2D harmonic functions, are constructed. Displacements, deformations, and stresses determined by these partial solutions have been called temperature functions. A simple formula for the thermal volume deformation is obtained and it is shown that the sum of normal stresses is equal to zero. Separate cases when the temperature depends on the product of harmonic functions of two variables on the degree of coordinate z are also considered. Partial and general solutions are derived for them. General solutions of thermoelasticity equations (Navier's equations) through four harmonic functions, when the temperature field is given three-dimensional or two-dimensional harmonic functions, are constructed. The solution of the system of Navier equations for axisymmetric temperature distribution is constructed.