

УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНО ГРАДІЄНТНОЇ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ З УРАХУВАННЯМ МІКРОІНЕРЦІЇ ТА ФЛЕКСОДИНАМІЧНОГО ЕФЕКТУ

Ольга Грицина, Мар'ян Грицина

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,*

Інститут будівництва та архітектури Словацької академії наук

olha.hrytsyna@savba.sk, maryan.hrytsyna@savba.sk

З використанням варіаційного принципу Гамільтона сформульовано систему балансових рівнянь та крайові умови лінійних неklasичних задач локально градієнтної електромеханіки. Згадана система рівнянь враховує вплив мікроструктури, мікроінерції та динамічного флексоелектричного ефекту на динамічну поведінку поляризованих неферромагнітних пружних тіл. Вона ґрунтується на градієнтного типу рівняннях стану локально градієнтної теорії діелектриків [1], яка враховує вплив мікроструктури матеріалу на поведінку поляризованих тіл. При записі варіаційного рівняння враховано, що густина кінетичної енергії, окрім стандартного інерційного доданку, пропорційного вектору швидкості, містить також доданок, пропорційний градієнту вектора швидкості, та доданок, який включає часові похідні від вектора поляризації:

$$K = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} \rho l_* \dot{u}_{i,j} \dot{u}_{i,j} + \rho M_{ij} \dot{u}_i \dot{\pi}_j^e.$$

Тут ρ – густина маси матеріалу, u_i та π_j^e – компоненти вектора переміщення та питомої поляризації, l_* – характерна віддаль для мікроінерції, M_{ij} – флексодинамічні коефіцієнти, крапка над символом відзначає похідну по часу. Значимо, що характерна віддаль для мікроінерції тісно пов'язана з мікроструктурою матеріалу (сталюю ґратки кристалічного матеріалу, розміром зерна тощо). За такого опису у рівнянні балансу лінійного моменту порівняно з класичною теорією виникають доданки, пропорційні другій похідній по часу від вектора поляризації та мішаним похідним від вектора переміщення по часовій та просторових змінних. Згадані доданки контролюють вплив динамічного флексоелектричного ефекту та мікроінерції на механічний рух твердих діелектричних тіл. Показано, що отримана система рівнянь угоджується з ре-

зультатами, отриманими Юдіним та Таганцевим [2] у рамках узагальненої теорії флексоелектрики, що враховує залежність енергії деформації від градієнта тензора деформації. Аналіз отриманих результатів засвідчив, що сформульована система рівнянь описує електромеханічну взаємодію у діелектричних матеріалах із високим рівнем симетрії кристалічної ґратки. Вона є корисною для вивчення поверхневих і розмірних ефектів у дрібномасштабних структурах, а також дослідження впливу мікроструктури матеріалу на статичний та динамічний відгуки пружних тіл, які працюють на високих частотах.

З використанням рівнянь локальної градієнтної електропружності проаналізовано поширення плоскої гармонічної хвилі у безмежному ізотропному діелектрику. Показано, що плоска поздовжня пружна хвиля є дисперсійною на високих частотах через вплив динамічного флексоелектричного ефекту. Дисперсія вираженіша у випадку коротких хвиль. Отримані результати можуть бути використані для теоретичного аналізу поширення височастотних поверхневих і плоских хвиль у поляризованих пружних структурах.

Роботу виконано за фінансової підтримки Slovak Research and Development Agency (грант номер SK-UA-21-0010) та Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic (грант номер VEGA-2/0061/20).

1. Hrytsyna O., Kondrat V. Local gradient theory for dielectrics: fundamentals and applications. 1st ed. – Singapore: Jenny Stanford Publishing Pte. Ltd., 2020. – 312 p.
2. Yudin P.V., Tagantsev A.K. Fundamentals of flexoelectricity in solids // Nanotechnology. – 2013. – 24. – С. 432001.

VARIATIONAL FORMULATION OF BOUNDARY PROBLEMS OF LOCAL GRADIENT ELECTROELASTICITY INCORPORATING MICRO-INERTIA AND FLEXODYNAMIC EFFECT

The non-classical theories of electroelasticity are extensively used to study wave propagation in dielectrics and the mechanical response of small-scale structures to dynamic loads. In this work, using the Hamilton variation principle and the gradient-type constitutive relations of the local gradient electrothermoelasticity, the governing equations and corresponding boundary conditions for piezoelectric solids are derived. To take the micro-inertia and dynamic flexoelectric effects into account, it is assumed that the kinetic-energy density function includes three terms. The first term contains the velocity vector (the classical inertia term), the second term involves the velocity gradients whereas the third one includes the first-time derivatives of the polarization vector. As a result, within this higher-grade theory, the linear moment balance equation additionally contains the phenomenological coefficients controlling the dynamics of polarization and one material constant (the micro-inertia length scale parameter) to capture the micro-inertia effect. Making use of the obtained system of governing equations, the propagation of a plane harmonic wave is analyzed. It is shown that the local gradient theory of dielectrics with dynamic flexoelectric effect allows for capturing the experimentally observed phenomenon of high-frequency dispersion of a longitudinal elastic wave. This research can be useful for the study of surface and size effects in small-scale structures as well as static and dynamic responses of microstructure-dependent solids having complex shapes and operating at high frequencies.