УДК 539.3

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Микола Юзв'як, Юрій Токовий

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

yuzvyaky@ukr.net, tokovyy@gmail.com

Однією з найвідоміших задач механіки деформівного твердого тіла є задача про пружну рівновагу прямокутного паралелепіпеда, яку ще в 1852 році сформулював Ґабріель Ляме. Незважаючи на численні спроби на сьогодні, наскільки відомо, не існує аналітичного розв'язку цієї проблеми в загальній тривимірній постановці. Основна складність при побудові точного аналітичного розв'язку полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь (рівнянь рівноваги та рівнянь суцільності) та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях паралелепіпеда. Для подолання таких ускладнень розроблено низку наближених аналітичних підходів, які у переважній більшості, ґрунтуються на реалізації таких основних стратегій: точне задоволення ключових рівнянь при наближеному задоволенні межових умов (методи перехресної суперпозиції, однорідних розв'язків та ін.), або забезпечення точного виконання умов на межі при наближеному задоволенні ключових рівнянь (методи безпосереднього інтегрування, поліномів Горві та ін.), або ж наближене задоволення межових умов та ключових рівнянь (низка варіаційних та числових підходів).

В цій роботі в рамках другої стратегії пропонується побудова розв'язку на основі узагальнення методу безпосереднього інтегрування, що полягає у поданні компонент тензора напружень через три скалярні функції, названі функціями Вігака (в честь засновника методу професора В.М. Вігака). Такий підхід був успішно апробований при розв'язуванні задач теорії термопружності для прямокутної області [1], прямокутного паралелепіпеда [2] та задач пружності та термопружності для порожнистого та суцільного циліндрів скінченної довжини [3, 4].

Основна ідея полягає у введенні трьох функцій Вігака $\mathcal{V}_i$ $(i = x, y, z)$ за формулами

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = -\mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} = -\mathcal{V}_y, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y \partial z} = -\mathcal{V}_x,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \mathcal{V}_x + \mathcal{V}_z, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} = \mathcal{V}_y + \mathcal{V}_x. \qquad (1)$$

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me02_12.pdf

Інтегрування співвідношень (1) з врахуванням всіх межових умов дає змогу виразити шукані компоненти тензора напружень через уведені функції та задані зовнішні навантаження. На основі знайдених співвідношень, що тотожно задовольняють рівняння рівноваги, межові умови, задані для різних компонент тензора напружень еквівалентно заміняються інтегральними умовами на введені функції Вігака. Самі ж функції є розв'язками ключової системи інтегро-диференціальних рівнянь суцільності. Крім того в процесі інтегрування формул (1) знаходимо інтегральні умови рівноваги для заданих зовнішніх навантажень та умови погодження для дотичних зусиль на відповідних ребрах паралелепіпеда.

З використанням запропонованого методу послідовних наближень розв'язування отриманої зв'язаної системи рівнянь суцільності зводиться до послідовності розв'язування плоских задач пружності у відповідних поперечних перетинах паралелепіпеда. При цьому використовується метод відокремлення змінних та розвинення заданих і шуканих функцій у відповідні ряди за побудованими повними ортогональними системами власних та приєднаних функцій. Як результат, шукані функції записуються у вигляді тривимірних тригонометричних рядів, коефіцієнти яких визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями. Наведено числові результати при різних способах силового навантаження та співвідношеннях граней прямокутного паралелепіпеда.

1. *Vihak V.M., Yuzvyak M.Y., Yasinsky A.V.* The solution of plane thermoelasticity problem for rectangular domain // J. Thermal Stresses. − 1998. − **21**, No. 5. − P. 545−562.
2. *Yuzvyak M., Tokovyy Y.* Thermal stresses in an elastic parallelepiped // J. Thermal Stresses. − 2022. − **45**, No. 12. − P. 1009−1028.
3. *Юзв'як М.Й., Токовий Ю.В.* Пружна рівновага порожнистого циліндра скінченної довжини за осесиметричного силового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2021. − **64**, № 3. – С. 65–89.
4. *Yuzvyak M., Tokovyy Y., Yasinskyy A.* Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Thermal Stresses. − 2020. − **44**, No. 3. − P. 359−376.

ELASTIC EQUILIBRIUM OF A RECTANGULAR PARALLELEPIPED

A semi-analytical algorithm is presented for solving a three-dimensional elasticity problem for a rectangular parallelepiped. By generalizing the direct integration method, the problem is reduced to the determination of three Vihak key functions introduced as the integrals of the equilibrium equations. All boundary conditions given for different stress tensor components are equivalently replaced by integral conditions for the introduced functions. The governing system of integrodifferential equations for the Vihak functions is derived based on the compatibility equations in terms of stresses. Method of successive approximations is used to construct the solutions of the obtained coupled system that implies reducing to the sequence of solving plane problems of elasticity in the corresponding cross-sections of the parallelepiped. A numerical analysis of the stress state of the parallelepiped under different types of power loads is presented.