

УДК 539.3

НАПРУЖЕННЯ В БЕЗМЕЖНІЙ ТОНКІЙ ПЛАСТИНІ З ДВОМА КРУГОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Олександр Пономаренко

Львівський національний університет природокористування

alexanderponomarenko54@gmail.com

Розглянуто нескінченну тонку пластину, що містить два кругових включення з іншого матеріалу. Приймаємо, що пластина та включення перебувають у загальному плоскому напруженому стані. Осі декартової системи координат x, y направлено вздовж осей симетрії. Задачу сформульовано в біполярних координатах α, β , які пов'язано з декартовими координатами x, y співвідношеннями [2] $x = J \operatorname{sh} \alpha$, $y = -J \sin \beta$, де $J = a / (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)$ – масштаб перетворення, a – віддаль від полюса до осі симетрії.

Задача полягає у визначенні розподілу напружень всередині і на спільних межах пластини і включень за двовісного розтягу на нескінченності пластини паралельно до осей x і y . Позначимо спільні межі пластини і включень $\alpha = \pm c$, а центри включень розташуємо в точках $x = \pm \operatorname{arctg} c$. Тоді крайові умови задамо для компонент напружень і зміщень наступним чином:

$$\sigma_{\alpha} = pT; \sigma_{\beta} = qT; \tau_{\alpha\beta} = 0, \alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0,$$

та

$$\sigma_{\alpha} = \hat{\sigma}_{\alpha}, \tau_{\alpha\beta} = \hat{\tau}_{\alpha\beta}, u_{\alpha} = \hat{u}_{\alpha}, u_{\beta} = \hat{u}_{\beta},$$

на спільній межі пластини і включень. Тут «шапочка» позначає величини, які відносяться до включень, а без «шапочки» – до пластини поза включеннями. Задаємо:

$$p = \begin{cases} 0, & \\ 1, & \text{і } q = \begin{cases} 1, & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } y; \\ 0, & \text{для однорідного розтягу в напрямку осі } x; \\ 1, & \text{для всестороннього розтягу.} \end{cases} \\ 1, & \end{cases}$$

Розглянемо функції напружень χ і $\hat{\chi}$ у формі $\chi/J = \alpha T(\chi_0/J + \chi_1/J)$ та $\hat{\chi}/J = \alpha T\hat{\chi}_1/J$, в яких χ_0/J відповідає розв'язку для суцільної нескін-

ченної пластини без включень, і може бути записана у вигляді:

1) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}^2 \alpha}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} - \text{sh} \alpha ;$$

2) для випадку однорідного розтягу в напрямку осі x :

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \alpha}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} ;$$

3) для випадку всестороннього розтягу:

$$\frac{\chi_0}{J} = \frac{1}{2} \frac{\text{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta}{\text{ch} \alpha - \cos \beta} - \text{sh} \alpha .$$

Аналіз здійснено на основі функцій напружень Ері для загального плоского напруженого стану з використанням біполярних координат. Для визначення невідомих коефіцієнтів функції напружень застосовано метод збурення за параметром. Отримано розподіл максимальних напружень на спільній межі включень і пластини для випадку однорідного розтягу в напрямку осі y залежно від r/d , де r – радіус включень, d – віддаль від центру включення до осі симетрії та залежно від співвідношень модулів пружності матеріалу пластини E та включень \hat{E} .

Результати, отримані в роботі, дають змогу теоретичного визначення коефіцієнта концентрації напружень біля включень і можуть бути використані в інженерній практиці при проектуванні деталей в кораблебудуванні, авіабудуванні та машинобудуванні [1].

1. *Калоеров С.А., Авдюшина Е.В., Мироненко А.Б.* Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинах. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 438 с.
2. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.

STRESSES IN AN INFINITE PLATE WITH TWO CIRCULAR INCLUSIONS

An analytical solution is constructed to a problem for an infinite plate containing two circular holes filled with elastic inclusions of another material, and subjected to the uniform tension in the direction of the x and y axes. The analysis is performed on the basis of the Airy stress function in the generalized plane stress and by applying the bipolar coordinates. The perturbation method is adopted for the determination of unknown coefficients in the solution.