

УДК 539.3

ЧИСЛОВИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНИХ НАПРУЖЕНЬ ДЛЯ ШТАМПІВ СКЛАДНОЇ ФОРМИ З НАПЕРЕД НЕВІДОМИМИ ДІЛЯНКАМИ КОНТАКТУ

Тетяна Соляр, Ольга Соляр

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

t_solyar@ukr.net, solyaro@yandex.com

Розглядається контактна осесиметрична задача для півпростору зі штампом, поверхня якого має складну форму. Відомо, що під дією такого штампа контакт буде здійснюватися на окремих, наперед невідомих ділянках контакту. Задачі такого типу достатньо вивчені для випадку гладких штампів параболоїдного типу, або кільцевих штампів, у яких виникає тільки одна ділянка контакту. Область контакту визначають, розв'язуючи відповідну систему алгебраїчних рівнянь, які отримують з умови, що на краях ділянок контакту контактні напруження дорівнюють нулю. Наведено алгоритм, який базується на сумісному використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей та квадратичного програмування.

Прийmemo, що рівняння основи штампа має вигляд $z = g(r)$, штамп до втискання дотикається до межі півпростору $z \leq 0$, відоме вертикальне зміщення штампа w_0 ($w_0 < 0$). Розглядаємо випадок, коли штамп є гладким і область контакту є наперед невідомою. Треба знайти ділянки контакту і розподіл контактних напружень.

Використаємо відоме співвідношення для переміщень межі півпростору $z \leq 0$, навантаженого нормально прикладеними зусиллями $\sigma(r) = \sigma_z(r, 0)$ на

проміжку $a < r < b$ у вигляді $w(r) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_a^b \sigma(\rho) \rho K\left(\frac{4r\rho}{(r+\rho)^2}\right) d\rho$, де $K(x)$ –

еліптичний інтеграл першого роду [1], $0 \leq x < 1$.

При наперед незаданій області контакту умови запишемо у вигляді альтернативних рівнянь-нерівностей Сін'єйоріні при $a < r < b$ [3]

$$\int_a^b q(\rho) F(r, \rho) d\rho = -W(r), \quad q > 0, \quad \int_a^b q(\rho) F(r, \rho) d\rho \geq -W(r), \quad q = 0, \quad (1)$$

$$F(r, \rho) = 4K(4r\rho/(r+\rho)^2)/(r+\rho), \quad W(r) = \pi E(w_0 + g(r))/(1-\nu^2), \quad q(\rho) = \rho p(\rho), \\ p(\rho) = -\sigma(\rho), \text{ а відрізок } [a, b] \text{ повинен вмішувати область контакту.}$$

Побудуємо квадратурну формулу для інтеграла вигляду

$$\int_a^b q(\rho)F(r_n, \rho)d\rho. \quad (2)$$

Неперервну функцію q на проміжку $a < r < b$ опишемо лінійними, кусково-неперервними інтерполяційними функціями:

$$q(r) = \sum_{n=0}^N q_n S_h(r - r_n), \quad S_h(x) = \begin{cases} 1 - |x|/h, & |x| \leq h, \\ 0, & |x| > h; \end{cases} \quad (3)$$

де $q_n = q(r_n)$, $r_0 = a$, $r_{j+1} = r_j + h$, $j = \overline{0, N-1}$, $N+1$ – кількість вузлових точок, $h = (b-a)/N$ – крок розбиття. Тоді для інтеграла (2) отримуємо

$$\int_a^b q(\rho)F(r_n, \rho)d\rho = \sum_{m=0}^N A_{nm}q_m, \quad n = \overline{0, N}, \quad A_{nm} = \int_{r_n-h}^{r_n+h} S_h(t - r_m)F(r_n, t)dt.$$

Замінюючи в системі рівнянь-нерівностей (1) інтеграли квадратурними формулами [2], отримуємо алгебраїчну систему рівнянь-нерівностей

$$\sum_{m=0}^N A_{nm}q_m = -W_n, \quad q_n \geq 0, \quad \sum_{m=0}^N A_{nm}q_m < -W_n, \quad q_n = 0, \quad n = \overline{0, N},$$

де $W_n = W(r_n)$, $q_n = r_n p(r_n)$, r_0, \dots, r_N – вузлові точки, $r_0 = a$, $r_N = b$. Ця система рівнянь-нерівностей має єдиний розв'язок, оскільки доведено, що вихідна контактна задача має єдиний розв'язок.

Показано, що розроблений алгоритм, є ефективним і дає змогу розв'язувати осесиметричні контактні задачі для півпростору за дії штампів складних форм.

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи упругости и вязкоупругости. – Москва: Наука, 1980. – 304 с.
2. *Максимович О., Сольяр Т.* Determination of non-axisymmetric stresses in the bodies of revolution based on regularized integral equations // European Journal of Mechanics. A – Solids. – 2021. – **87**. – 2021. – 104218.
3. *Signorini A.* Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // Rend. di Mat. e delle sue appl. – 1959. – **18**, No 1–2. – P. 95–139.

NUMERICAL ALGORITHM FOR DETERMINING THE CONTACT STRESSES FOR STAMPS OF COMPLEX SHAPE WITH PREVIOUSLY UNKNOWN CONTACT AREAS

A numerical algorithm for solving an axisymmetric elasticity problem on the interaction of an elastic half-space with a stamp whose surface has a complex shape has been constructed. Under the action of such a stamp, contact occurs on separate, preliminary unknown contact areas. The contact problem is formulated in the form of Signorini's integral inequalities, which, using quadrature formulas for singular integrals, are transformed into a system of linear algebraic inequalities. The solution of the system is reduced to finding the minimum of the quadratic form under linear constraints on the unknown contact stresses.