

УДК 539.3

## ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ КОАКСІАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕОДНОРІДНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ

Олександр Бедзір, Василь Шопя

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

olbedzir@gmail.com, vasyllshopa@gmail.com

Моделювання прорізних оболонкових пружних елементів [1] зводиться до формулювання задач взаємодії тришарової контактної системи з умовами неідеального контакту шарів [2, 3]. Метою роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи у випадку використання неоднорідного заповнювача.

Розглянемо пружний порожнистий циліндр зовнішнього  $R_1$  і внутрішнього  $R_2$  радіусів та довжини  $2l$ , який розділяє коаксіально встановлені прорізу (радіуса  $R_1$  і товщини  $h_1$ ) та суцільну (радіуса  $R_2$  і товщини  $h_2$ ) циліндричні оболонки. На торці циліндра (деформівного заповнювача) через абсолютно жорсткі гладкі поршні передається зовнішнє навантаження  $Q$ . Вважаємо, що кількість розрізів зовнішньої оболонки є достатньо великою, а заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Фрикційну взаємодію оболонок і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту. Характер контактної взаємодії заповнювача та оболонок визначається законом сухого тертя  $\tau(\zeta) = -f_i \sigma \operatorname{sgn} \zeta$ ,  $\zeta \in W_i$ ,  $i=1, 2$ , де  $f_i$  – коефіцієнти тертя відповідно на поверхнях  $W_i$ ;  $W_1 \in [-1, -t] \cup [t, 1]$ ,  $W_2 = (-t, t)$  – поверхні контакту тіл з різними коефіцієнтами тертя;  $t \in [0, 1]$  – координата точки розділу ділянок  $W_i$ .

Контактну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь відносно функцій розподілу контактних напружень між заповнювачем та оболонками:

$$\begin{cases} a_{11}\sigma_1(\zeta) + a_{12}\sigma_2(\zeta) + \int_{W_i} (K_{11}(\xi, \zeta)\sigma_1(\xi) + K_{12}(\xi, \zeta)\sigma_2(\xi)) d\xi = -\frac{\nu P}{1-\nu}; \\ a_{21}\sigma_1(\zeta) + a_{22}\sigma_2(\zeta) + \int_{W_i} (K_{21}(\xi, \zeta)\sigma_1(\xi) + K_{22}(\xi, \zeta)\sigma_2(\xi)) d\xi = -\frac{\nu P}{1-\nu}. \end{cases}$$

Ядра інтегральних рівнянь системи описуються формулами:

$$K_{11}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_1}{R_1^2 - R_2^2} f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\xi, \zeta) \quad ;$$

$$K_{12}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_2}{R_1^2 - R_2^2} f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) ;$$

$$K_{21}(\xi, \zeta) = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_1}{R_1^2 - R_2^2} f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) ;$$

$$K_{22}(\xi, \zeta) = \left( 1 + \frac{\nu_2}{2\nu(\zeta)} \beta_2 \right) \frac{\nu}{1-\nu} \frac{IR_2}{R_1^2 - R_2^2} f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) ,$$

$$4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu(\zeta)} \frac{R_1^3 b}{I_x} \frac{E}{E_1} ; E_0 I_x = 0,5 E_0 h R^3 \left( \phi + \sin(\phi) - 8 \sin^2(\phi/2) / \phi \right) ;$$

$$b = 2R \sin(\phi/2) ; \phi = 2\pi/N, \quad N - \text{кількість розрізів}; \quad P \equiv \frac{Q}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} ; \quad E_o, \quad E_i ,$$

$\nu$  – модулі Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалів оболонок та заповнювача. Коефіцієнти  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  та функцію Гріна крайової задачі  $G(\zeta, \xi)$  наведено в роботах [2, 3].

Систему інтегральних рівнянь розв’язано методом квадратур, з використанням формули трапецій з рівномірною сіткою вузлів. Для розв’язування системи рівнянь застосовано метод Гауса з виділенням головного елемента. В результаті розв’язку отримано значення контактних напружень, через які визначено характеристики пружної системи.

1. Шона В.М., Величкович А.С., Величкович С.В., Шацький І.П., Попадюк І.Й., Шона Т.В. Оболонкові пружини. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 92 с.
2. Шона В.М., Попадюк І.Й., Бедзір О.О. Змішані задачі фрикційного контакту коаксіальних циліндричних оболонок і деформівного заповнювача // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – 41. № 3. – С. 103–108.
3. Шона В.М., Шацький І.П., Бедзір О.О., Величкович А.С. Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.

#### FRICIONAL INTERACTION OF COAXIAL CYLINDRICAL SHELLS WITH INHOMOGENEOUS FILLER

*The paper solves the mixed problem of frictional interaction in the system of coaxial cylindrical shells divided by an inhomogeneous filler. The integral equation for the determination of the contact stresses is derived using one-dimensional shell and filler models. On the basis of numerical solutions, the Authors investigated the effect of mechanical, geometric, and tribologic contacting pairs parameters on contact pressure distribution, rigidity, and strength of the system. For the numerical solution of integral equations, we used a numerical trapezoidal rule with a uniform grid.*