

УДК 539.3

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З МІЖФАЗНИМИ ВИСОКОПРОВІДНИМИ ДЕФЕКТАМИ

Христина Середницька, Микола Шевцов

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Львівський національний університет імені Івана Франка*

ser.kristina@gmail.com, mykola.shevtsov@lnu.edu.ua

Дана доповідь стосується побудови аналітично-числової процедури для розв'язування задачі термопружності для біматеріалу з системою міжфазних високопровідних тріщин за теплопередачі між їх берегами.

На основі наведеної в літературі [2] класифікації математичних моделей теплопровідності різного роду включень, можна виділити модель низько провідної тріщини – між берегам якої виникає стрибок температури, який пропорційний тепловому потокові і обернено пропорційний теплопровідності тріщини в поперечному напрямі; і високопровідної тріщини – коли між берегами тріщини тепловий потік пропорційний теплопровідності тріщини у поздовжньому напрямі.

Розглянемо плоску задачу термопружності для біматеріалу з періодичною системою міжфазних теплопровідних тріщин за врахування передачі тепла між їх берегами в поздовжньому напрямі. Компоненти біматеріалу наділені різними термомеханічними властивостями, а на лінії їх з'єднання розташована періодична система тріщин завдовжки $2a$ з періодом розташування d . Теплопровідність тріщин характеризується коефіцієнтом поздовжньої теплопровідності λ_s . На нескінченності у напрямку, перпендикулярному до міжфазної лінії, біматеріал підданий дії стаціонарного однорідного теплового потоку q і рівномірно розподілених розтягувальних зусиль p .

Задачу термопружності для такого біматеріалу за відомою методикою [2] зведено до системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури між берегами тріщин $\gamma(x)$ та висоти зазору тріщин $h(x)$:

$$\lambda_s \gamma''(x) + \frac{6\lambda}{\pi} \int_{-a}^a \gamma'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = -12q, \quad |x| < a,$$

$$\frac{1}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} (\gamma(x) - \gamma_{ef}) = -\frac{G^*}{2} p, \quad |x| < a,$$

де $\gamma(\pm a) = 0$; $h(\pm a) = 0$; $\gamma_{ef} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx$; $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$; $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$;

$$\eta_1 = \frac{\alpha_1(1+\nu_1)}{\lambda_1}; \quad \eta_2 = \frac{\alpha_2(1+\nu_2)}{\lambda_2}; \quad G^* = (1 - \kappa_1\kappa_2) / (G_1(1 - \kappa_2)); \quad \kappa_n = 3 - 4\nu_n;$$

$n = 1, 2$; $(1 - 2\nu_1)G_2 = (1 - 2\nu_2)G_1$; ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона, G_1, G_2 – модулі зсуву, α_1, α_2 – коефіцієнти лінійного теплового розширення, λ_1, λ_2 – коефіцієнти теплопровідності компонент біматеріалу.

Для побудови розв'язку отриманої системи розроблено аналітично-числову процедуру, яка базується на методі колокацій [1]. Невідомі функції $\gamma(x)$ і $h(x)$ апроксимуємо скінченими сумами за поліномами Чебишева, в результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів при поліномах Чебишева. Останню систему розв'язуємо числово. На основі проведених розрахунків проаналізовано фізичні характеристики міжфазної лінії біматеріалу, а саме зміну форми тріщин, ефективний стрибок температури, який визначається сумарним впливом тріщин, та ефективний міжфазний термоопір біматеріалу.

1. *Мартиняк Р.М., Середницька Х.І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
2. *Kushch V.I., Sevostianov I., Belyaev A.S.* Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interface: complete solutions for periodic and random microstructures // *Mechanics of Materials*. – 2015. – **89**. – P. 1–11.

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF THE THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A BIMATERIAL WITH HIGHLY CONDUCTIVE INTERFACE DEFECTS

The thermoelastic behavior of a bimaterial with a periodic system of cracks was studied, taking into account heat transfer between their edges in the longitudinal direction. The problem of thermoelasticity was reduced to a system of singular integrodifferential equations with respect to temperature jumps and cracks opening. The resulting system was solved analytically by a numerical method using Chebyshev polynomials. The interface parameters of the bimaterial were analyzed for different values of the coefficient of thermal conductivity of the cracks.