УДК 517.9:539.3

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ТРИВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА З УМОВОЮ ТРАНСМІСІЙНОГО ТИПУ НА РОЗІМКНУТІЙ ЛІПШИЦЕВІЙ ПОВЕРХНІ

Юрій Сибіль

Львівський національний університет імені Івана Франка

sybil.yuri@gmail.com

Розглядається задача визначення стаціонарного температурного поля у тривимірній обмеженій області, що містить тріщину або тонке включення, які моделюються деякою розімкнутою поверхнею. Температура при переході через цю поверхню є непервною і пропорційною до різниці теплових потоків з різних сторін поверхні. Аналогічні задачі для теплопроникних та теплопровідних тріщинин розглядались в [1]. Двовимірний випадок такої задачі досліджено в роботі [2].

Нехай $\Omega_+ \subset \mathbb{R}^3$ – обмежена однозв'язна область з ліпшицевою межею Σ, S – розімкнута двостороння ліпшицева поверхня, з допомогою якої ми будемо моделювати деяку теплопроникну тріщину в тілі, обмеженому поверхнею Σ. Вважаємо, що $\overline{S} \subset \Omega_+$, де $\overline{S} = S \cup \Gamma$, Γ – межа S. Позначимо $\Omega = \Omega_+ \setminus \overline{S}$, $[\gamma_{i,S}] = \gamma_{i,S}^{+} - \gamma_{i,S}^{-}$, $i = 1,2$, де $\gamma_{0,S}^{\pm} u(x)$ – значення функції $u(x)$, заданої в області Ω, на S, а $\gamma_{1,S}^{\pm} u(x)$ – граничне значення її нормальної похідної з різних сторін S.

Математичною моделлю такої задачі стаціонарної теплопровідності є наступна задача в області Ω: знайти функцію $u \in H^1(\Omega)$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

умову неперервності температурного поля при переході через S та умову теплопроникності на S при заданій температурі на зовнішній поверхні Σ

$$\begin{gathered} [\gamma_{0,S}] u(x) = 0, \quad \lambda [\gamma_{1,S}] u + \gamma_{0,S}^{\pm} u = f, x \in S, \\ \gamma_{0,\Sigma}^{+} u(x) = g(x), x \in \Sigma. \end{gathered} \tag{2}$$

Тут $\lambda \in C(\overline{S})$, $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_14.pdf

Теорема 1. *Якщо* $\lambda \in C(\overline{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \overline{S}$, *то задача (1), (2) має єдиний розв'язок для довільних* $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Нехай $Q(x,y) = 1/(4\pi|x-y|)$. Для функції $u(x)$, яка є розв'язком задачі (1), (2) вірне наступне інтегральне подання: $u(x) = V_S\tau(x) + V_\Sigma\sigma(x)$, $x \in \Omega$, де $\tau = [\gamma_{1,S}]u$, $\sigma = \gamma_{1,\Sigma}^{+}u$, $V_S\tau(x) = \int_S Q(x,y)\tau(y)ds_y$, $V_\Sigma\sigma(x) = \int_\Sigma Q(x,y)\sigma(y)ds_y$, $x \in \Omega$.

Використавши крайові умови (2), отримаємо систему інтегральних рівнянь відносно невідомих τ та σ:

$$\begin{cases} \lambda\tau + K_S\tau + \gamma_{0,S}^{+}V_\Sigma\sigma = f, \\ \gamma_{0,\Sigma}^{+}V_S\tau + K_\Sigma\sigma = g, \end{cases} \tag{3}$$

де $K_S\tau = \gamma_{0,S}^{+}V_S\tau$, $K_\Sigma\sigma = \gamma_{0,\Sigma}^{+}V_\Sigma\sigma$ – інтегральні оператори зі слабкою особливістю, визначені на S та Σ відповідно.

Теорема 2. *Задача (1), (2) є еквівалентною системі (3). Якщо* $\lambda \in C(\overline{S})$, $\lambda(x) \geq 0$, $x \in \overline{S}$, *то система інтегральних рівнянь (3) має єдиний розв'язок для довільних* $f \in L_2(S)$, $g \in H^{1/2}(\Sigma)$.

Для чисельного розв'язування системи (3) використовується метод колокації з використанням локальних базисних функцій, що дає можливість отримати добре обумовлену систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження наближених значень густин τ та σ.

1. *Кіт Г.С., Хай М.В.* Метод потенціалів в тривимірних задачах термопружності тіл з тріщинами. – Київ: Наукова думка, 1989. – 284 с.
2. *Sybil Yu., Grytsko B.* Boundary value problem for the two-dimensional Laplace equation with transmission condition on thin inclusion // Journal of Numerical and Applied Mathematics. – 2016. – **3**, No. 109. – P. 120–129.

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEM OF STATIONARY HEAT CONDUCTION WITH CONDITION OF TRANSMISSION TYPE ON OPEN LIPSCHITZ SURFACE VALUE PROBLEM FOR THREE-DIMENSIONAL LAPLACE EQUATION

We consider the stationary temperature field in a domain with heat permeable crack or thin inclusion. The mathematical model of this problem is a boundary value problem for the three-dimensional Laplace equation in a bounded domain with boundary conditions of transmission type given on both sides of an open Lipschitz surface. Using the integral representation of the solution we reduce the initial boundary value problem to the equivalent system of integral equations. We show the existence and uniqueness of solutions to the boundary value problem and the obtained system of integral equations in appropriate functional spaces. For the numerical solution of the obtained system, we use the algorithm based on the collocation method.