УДК 539.3:534.1

ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ СФЕРИЧНОГО ДЕФЕКТУ

Олег Назаренко, Анжела Стехун

Державна академія будівництва та архітектури,

Одеський національний університет імені І.І.Мечникова

Gelo.fabric@gmail.com, angela.stehun@gmail.com

Мета роботи. На основі методу розривних розв'язків [2, 3] у випадку стаціонарних пружних хвиль запропоновано спосіб зведення задач дифракції до системи одновимірних інтегро-диференціальних рівнянь. Деталізацію методу наведено для тонкого жорсткого сферичного включення.

Основний матеріал. Дефект [2, 3] – частина поверхні, при перетині якої зазнають розривів першого роду напруження та зміщення. Розглянемо випадок, коли дефектом є сферична поверхня. Побудуємо розривний розв'язок для хвильового рівняння

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \quad |\varphi| < \pi, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

де Δ – оператор Лапласа у сферичній системі координат.

Під розривним розв'язком [2, 3] рівняння (1) розуміємо такий розв'язок, який задовольняє його всюди за виключенням лише точок дефекту. У цих точках функція та її нормальна (до поверхні дефекту) похідна зазнають розривів першого роду і додатково задані їхні стрибки:

$$\begin{aligned} &\psi(R-0,\theta,\varphi,t) - \psi(R+0,\theta,\varphi,t) = \langle\psi\rangle, \\ &\psi'(R-0,\theta,\varphi,t) - \psi'(R+0,\theta,\varphi,t) = \langle\psi'\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

Позначимо похідну за змінною r штрихом і, застосовуючи до рівняння (1) інтегральні перетворення Лапласа (за змінною t), Фур'є (за змінною φ) та Лежандра (за змінною θ), зведемо (1) до вигляду:

$$\frac{1}{r^2}\left[\left(r^2\psi'_{pnk}(r)\right)' - k(k+1)\psi_{pnk}(r)\right] - \frac{p^2}{c^2}\psi_{pnk}(r) = 0, \; 0 < r < \infty. \tag{3}$$

Застосувавши до (3) пряме, а потім зворотні перетворення Ганкеля і Лежандра [2], знаходимо трансформанту розривного розв'язку (3) зі стрибками (2):

$$\psi_{pn}(r,\theta) = R^2\left[\int_0^{\omega} T_{n,p}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau - \int_0^{\omega} \tilde{T}_{n,p}(\theta,\tau)\sin\tau d\tau\right],$$

---

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_16.pdf

$$T_{n,p}(\theta,\tau) = \langle \psi'_{pn} \rangle M_{n,p}(\theta,\tau,r,R);$$
$$\tilde{T}_{n,p}(\theta,\tau) = \langle \psi_{pn} \rangle \frac{\partial}{\partial R} M_{n,p}(\theta,\tau,r,R), \tag{4}$$

де

$$M_{n,p}(\theta,\tau,r,R) = \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos\tau) \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{rR}} \begin{cases} I_\nu(Rpc^{-1}) K_\nu(rpc^{-1}), \ r > R, \nu = k + \dfrac{1}{2}, \\ I_\nu(rpc^{-1}) K_\nu(Rpc^{-1}), r < R, k = 0,1,2,\ldots, \end{cases}$$

$I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ – відповідно модифіковані функції Бесселя та Макдональда.

Якщо процес коливань є усталеним, то для функції $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ отримаємо рівняння (3), в якому $p = -i\omega_0$. І тоді, замість (4), остаточно отримуємо:

$$\tilde{\psi}_n(r,\theta) = R^2 \left[\int_0^\omega P_{n,\mu}(\theta,\tau) \sin\tau d\tau - \int_0^\omega \tilde{P}_{n,\mu}(\theta,\tau) \sin\tau d\tau \right],$$

$$P_{n,\mu}(\theta,\tau) = \langle \tilde{\psi}'_{pn} \rangle M_{n,\mu}, \quad n\tilde{P}_{n,\mu}(\theta,\tau) = \langle \tilde{\psi}_{pn} \rangle \frac{\partial}{\partial R} M_{n,\mu},$$

$$M_{n,\mu} \equiv M_{n,\mu}(\theta,\tau,r,R) = \sigma_{kn} P_k^{|n|}(\cos\theta) P_k^{|n|}(\cos\tau) D_{k,\mu}(r,R),$$

$$D_{k,\mu}(r,R) = \frac{\pi i}{2\sqrt{rR}} \begin{cases} J_\nu(R\mu) H_\nu^{(1)}(r\mu), r > R, \mu = \dfrac{\omega_0}{c}, \\ J_\nu(r\mu) H_\nu^{(1)}(R\mu), r < R, \nu = k + \dfrac{1}{2}, k = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

1. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракція пружних хвиль. – Київ: Наукова думка, 1978. – 307 с.
2. *Nazarenko O.A.* Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect // Norwegian Journal of development of the International Science. – 2022. – No. 87. – P. 3–5.
3. *Popov G.Ya.* Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect // Advances in Mechanics. – 1992. – **15**, No. 1-2. – P. 71–110.

CONSTRUCTION OF A DISCONTINUOS SOLUTION OF THE WAWE EQUATION FOR A SPHERICAL DEFECT

Based on the method of discontinuous solutions in the case of stationary elastic waves, a method was proposed for reducing a number of diffraction problems to a system of one-dimensional integro-differential equations. The defect can be either a spherical crack or a thin rigid spherical inclusion. Detailing of the method is given for the second case.