УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ПОЛЯ ПРИ ДИФРАКЦІЇ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ НА СИСТЕМІ ТРІЩИН ІТЕРАЦІЙНИМ МЕТОДОМ

Всеволод Попов

Національний університет «Одеська морська академія»

Розглядається пружний ізотропний простір, який знаходиться у стані плоскої деформації та містить N наскрізних тріщин. Ці тріщини в координатній площині Oxy розміщуються на відрізках зовдовжки $2d_k$ з центрами у точках $O_k\left(a_k, b_k\right), k = 1, 2, \ldots N$ (рис. 1). Тріщини перебувають під дією поздовжніх зсувних хвиль, які визначаються потенціалами

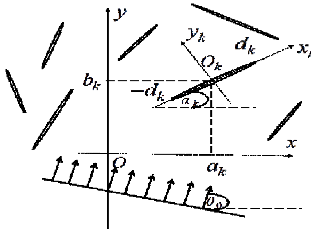

Рис. 1

$$\psi_{0j}\left(x, y\right) = A_j \kappa_j^{-1} \exp\left(i\kappa_j\left(x\cos\theta_0 + y\sin\theta_0\right)\right);\ j = 1, 2. \quad (1)$$

Нехай $u\left(x, y\right)$ і $v\left(x, y\right)$– переміщення у розсіяному на тріщинах хвильовому полі. Тоді вони мають задовольняти наступним рівнянням руху:

$$\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\Delta u = -\rho\omega^2 u;\quad \left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\Delta v = -\rho\omega^2 v. \quad (2)$$

Для формулювання крайових умов на тріщинах з кожною з них пов'язується локальна система координат $O_k x_k y_k$ (рис. 1). Нехай $u^k\left(x_k, y_k\right)$, $v^k\left(x_k, y_k\right)$, $\sigma_x^k\left(x_k, y_k\right), \sigma_y^k\left(x_k, y_k\right)$, $\tau_{yx}^k\left(x_k, y_k\right)$– переміщення і напруження розсіяних хвиль у системі $O_k x_k y_k$, а $u^{0k}\left(x_k, y_k\right)$, $v^{0k}\left(x_k, y_k\right)$, $\sigma_x^{0k}\left(x_k, y_k\right)$, $\sigma_y^{0k}\left(x_k, y_k\right)$, $\tau_{yx}^{0k}\left(x_k, y_k\right)$– переміщення та напруження, спричинені хвилями (1), що поширюються. За умови незавантаженості поверхонь тріщин мають виконуватись рівності

$$\sigma_y^k\left(x_k, 0\right) = -\sigma_y^{0k}\left(x_k, 0\right);\ \tau_{yx}^k\left(x_k, 0\right) = -\tau_{yx}^{0k}\left(x_k, 0\right); -d_k < x < d_k; k = 1, 2, \ldots N. \quad (3)$$

Як і у [1], вихідна задача (1)-(3) приводиться до системи $2N$ сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибків переміщень $\chi_{sk}\left(x_k\right)$.

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_18.pdf

Щоб спростити розв'язання цієї системи у випадку великої кількості тріщин, пропонується ітераційний метод. Як і у [2], він полягає в розв'язуванні на кожному кроці рівнянь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[-\frac{2\left(1-\xi^2\right)}{\tau-\zeta}E+R_{l2+l}\left(\tau-\zeta\right)\right]\Phi_{l+2}^{(i)\prime}\left(\tau\right)d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left[\kappa_0^2\Gamma\ln\left|\tau-\zeta\right|+V_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)\right]\Phi_{l+2}^{(i)}\left(\tau\right)d\tau= \tag{4}$$

$$=F_l\left(\zeta\right)-\sum_{s=3}^{4}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}F_{ls}\left(\tau,\zeta\right)\Phi_s^{(i-1)\prime}\left(\tau\right)d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}U_{ls}\left(\tau,\zeta\right)\Phi_s^{(i-1)}\left(\tau\right)d\tau\right),$$

$l=1,2;\ i=1,2,3....$

У рівняннях (4) позначено $\varphi_{sk}\left(\tau\right)=\chi_{sk}\left(d_k\tau\right)/d_k$, $\Phi_s(\tau)=(\varphi_{s1}(\tau),$ $\varphi_{s2}(\tau),...,\varphi_{sN}(\tau))^T$, $\Phi_s'\left(\tau\right)=\left(\varphi_{s1}'\left(\tau\right),\varphi_{s2}'\left(\tau\right),...,\varphi_{sN}'\left(\tau\right)\right)^T$, $s=3,4$; $E-$ одинична $N\times N$ матриця, $\Gamma-$ діагональна $N\times N$ матриця з елементами $\gamma_k=d_k/d, d=\max\left(d_1,d_2,...,d_N\right)$ на діагоналі, $R_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)$, $V_{ll+2}\left(\tau-\zeta\right)$, $l=1,2-$ діагональні $N\times N$ матриці, $F_{ls}\left(\tau,\zeta\right)$, $U_{ls}\left(\tau,\zeta\right)-$ $N\times N$ матриці, діагональні елементи яких дорівнюють нулю. Ненульові елементи цих матриць є неперервними на $-1\le\tau,\zeta\le1$ функціями. При $i=0$ суми у правих частинах (4) мають бути відсутніми і отримуємо інтегральні рівняння, які відповідають N поодиноким тріщинам. Їх розв'язок обирається за нульове наближення. Розв'язки інтегральних рівнянь (4) здійснено числовим методом, як і в [1, 2]. Наведено числові приклади, які показують збіжність ітераційного процесу навіть для достатньо щільного розміщення тріщин.

1. *Popov V.G.* System of cracks under the impact of plane elastic waves // J. Phys.: Conf. – 2022. – Ser. 2231 012004. Doi: 10.1088/1742-6596/2231/1/012004.
2. *Popov V.G.* Iterative method for the determination of a difraction field in the ineraction of a longitudinal share wave with a system of cracs // Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – **183**, No. 2. – P. 241–251.

DETERMINING OF THE WAVE FIELD UNDER DIFFRACTION OF ELASTIC WAVES ON A SYSTEM OF CRACK BY THE ITERATIVE METHOD

The problem of determining the wave field under the diffraction of elastic waves on the cracks system has been solved. The initial problem is reduced to the system of singular integro-differential equations. An iterative method of solving this system is proposed in which zero approximation is the solution of ecuations for alones cracks.