

УДК 539.3

## КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ МІЖФАЗНОГО ВІДШАРОВАНОГО НАПІВНЕСКІНЧЕНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Володимир Острик

*Інститут прикладної фізики НАН України*

[v.i.ostryk@gmail.com](mailto:v.i.ostryk@gmail.com)

Міжфазні тонкі жорсткі відшаровані включення у кусково-однорідному середовищі вивчалися в роботах [2–5] в рамках осциляційної моделі. Осциляція напружень та переміщень в околах кінців включень свідчить про фізичну суперечливість отриманих у цих роботах розв’язків, оскільки поблизу кінців включень спостерігається взаємне проникнення різнорідних матеріалів. Щоб запобігти таким протиріччям, аналогічно до моделі Комніоу для міжфазної тріщини [6], поблизу кінця включення вводимо область контакту між відшарованою межею пружного тіла та включенням. Контактну задачу для відшарованого включення в однорідному середовищі розглянуто в роботі [1].

Розглянемо дві пружні півплощини: верхню  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  і нижню  $0 \leq r < \infty$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq 0$  з модулями зсуву  $G_1$ ,  $G_2$  та коефіцієнтами Пуассона

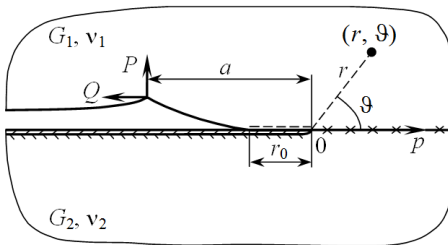


Рис. 1

$\nu_1$ ,  $\nu_2$  відповідно, жорстко з’єднаних між собою вздовж частини  $\vartheta = 0$  своєї спільної межі. На іншій частині  $\vartheta = \pm\pi$  межі розміщене тонке жорстке включення, нижня сторона  $\vartheta = -\pi$  якого з’єднана з нижньою півплощиною, а верхня  $\vartheta = \pi$  – відшарована від верхньої півплощини. Тобто між включенням і верхньою пів-

півплощиною утворилася напівнескінченна тріщина  $\vartheta = \pm\pi$ . До верхнього берега  $\vartheta = \pi$  тріщини на відстані  $r = a$  від її вершини прикладено зосереджені нормальну  $P$  і дотичну  $Q$  сили (рис. 1). Вважаємо, що поблизу вершини тріщини її береги контактують в області  $0 < r \leq r_0$  невідомого розміру  $r_0$ , де нормальні та дотичні напруження пов’язані законом тертя Амонтона.

Із застосуванням методу Вінера–Гопфа розв’язок інтегрального рівняння задачі знайдено в замкненій формі. Отримано трансцендентне рівняння для знаходження розміру  $r_0$  області контакту берегів тріщини. Знайдено розподіли напружень в області контакту ( $0 < r \leq r_0$ ,  $\vartheta = \pi$ ), на межі поділу пів-

площин поза тріщиною ( $0 < r < \infty$ ,  $\vartheta = 0$ ) та в місці з'єднання включення з півплощиною ( $0 < r < \infty$ ,  $\vartheta = -\pi$ ), асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі кінця включення ( $r \rightarrow 0$ ,  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ ).

У таблиці 1 для коефіцієнта тертя  $\mu_0 = 0$  (верхні значення) та  $\mu_0 = 0.5$  (нижні значення) і різного відношення сил  $Q/P$  наведено відносний розмір  $r_0/a$  області контакту і безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень  $\bar{K}_I = K_I a^{1-\rho} / \sqrt{P^2 + Q^2}$ ,  $\bar{K}_{II} = K_{II} a^{1-\rho} / \sqrt{P^2 + Q^2}$ , де  $\rho$  – показник головної особливості напружень. Видно, що інтенсивність зсувних напружень, перевищує інтенсивність розтягувальних напружень більше, ніж у 3 рази.

Таблиця 1

| $Q/P$           | 0  | 1  | 2  | 5                | 10               | 20               |
|-----------------|--|--|--|------------------|------------------|------------------|
| $\frac{r_0}{a}$ | 1.01·10 <sup>-10</sup><br>1.15·10 <sup>-10</sup> | 3.19·10 <sup>-5</sup><br>3.61·10 <sup>-5</sup> | 5.24·10 <sup>-3</sup><br>5.91·10 <sup>-3</sup> | 0.245<br>0.268   | 0.668<br>0.702   | 0.900<br>0.920   |
| $\bar{K}_I$     | 0.1035<br>0.2812                                 | 0.0982<br>0.1765                               | 0.0962<br>0.1460                               | 0.0948<br>0.1254 | 0.0945<br>0.1191 | 0.0944<br>0.1161 |
| $-\bar{K}_{II}$ | 0.4001<br>0.8914                                 | 0.3796<br>0.5595                               | 0.3718<br>0.4629                               | 0.3665<br>0.3977 | 0.3654<br>0.3775 | 0.3651<br>0.3680 |

1. Антипов Ю.А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып. 4. – С. 669–680.
2. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, вып. 6. – С. 1017–1037.
3. Кривий О.Ф. Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2014. – № 2. – С. 77–84.
4. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
5. Черепанов Г.П. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 131–137.
6. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone // J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 780–781.

#### CONTACT PROBLEM FOR INTERFACIAL EXFOLIATED SEMI-INFINITE INCLUSION

*The equilibrium of two rigidly connected elastic half-planes made of different materials, at the interface of which a semi-infinite thin rigid inclusion is placed, is considered. One side of the inclusion is connected to one of the half-planes, and the other is exfoliated with the formation of a crack. Normal and tangential concentrated forces are applied to one of the edges of the crack. The frictional contact of the crack faces near its tip is taken into account. Using the Wiener–Hopf method, the solution of the integral equation of the problem is obtained in a closed form. The size of the contact zone of the crack faces, stress distributions in the contact zone, as well as at the interface of the half-planes outside the crack and at the junction of the inclusion with the half-plane are found.*