УДК 539.3

ПОЗДОВЖНІЙ ЗСУВ ОРТОТРОПНОГО ТІЛА З АНІЗОТРОПНИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Михайло Саврук, Володимир Кравець, Любов Онишко, Олексій Кваснюк

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vlad@ipm.lviv.ua, onyszko@ukr.net

Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) розв’язано антиплоску задачу теорії пружності для ортотропного тіла (матриці) з криволінійними анізотропними включеннями. Побудовані СІР другого роду розв’язано числово методом механічних квадратур. Досліджено впливи пружних характеристик анізотропних матеріалів та форм криволінійних включень на розподіли контактних та контурних напружень зсуву.

Розглянуто ортотропну матрицю S, віднесену до декартової системи координат xOy з осями вздовж осей ортотропії матеріалу. Матриця містить анізотропні включення $S^{(j)}$, обмежені криволінійними замкненими контурами $L^{(j)}$. Матеріали матриці та включень за поздовжнього зсуву характеризуються певними параметрами [2, 3]: $a_0 = \sqrt{a_{44}a_{55}}$, $a_{45} = 0$, $a_0^{(j)} = \sqrt{a_{44}^{(j)}a_{55}^{(j)} - a_{45}^{(j)}a_{45}^{(j)}}$, $\gamma_3 = \sqrt{a_{44}/a_{55}} = \sqrt{G_{xz}/G_{yz}}$, $\mu_3 = i\gamma_3$; $\mu_3^{(j)} = \hat{\gamma}_3^{(j)} + i\gamma_3^{(j)}$, $\hat{\gamma}_3^{(j)} = a_{45}^{(j)}/a_{55}^{(j)}$, $\gamma_3^{(j)} = a_0^{(j)}/a_{55}^{(j)}$). На нескінченності задано навантаження $\tau_{yz}^{\infty} = \tau,\ \tau_{xz}^{\infty} = 0$. За переходу через контури включень напруження неперервні

$$\tau_{nz}^{+}(t) - \tau_{nz}^{-}(t) = 0, t \in L,\ L = \bigcup L^{(j)}, \tag{1}$$

а переміщення можуть зазнавати розриву

$$w^{+}(t) - w^{-}(t) = g^{*}(t),\ t \in L. \tag{2}$$

Тут верхні знаки відповідають граничним значенням величин зліва (+) та справа (-) за вибраного напряму обходу контурів проти годинникової стрілки.

Комплексні потенціали напружень шукатимемо у вигляді [3]

$$\Phi_3(z_3) = \Gamma_3 + \int_{L_3} \frac{\phi_3'(t_3)}{t_3 - z_3} dt_3,\ z \in S;\quad \Phi_3^{(j)}(z_3^{(j)}) = \Gamma_3^{(j)} + \int_{L_3^{(j)}} \frac{\phi_3'^{(j)}(t_3^{(j)})}{t_3^{(j)} - z_3^{(j)}} dt_3^{(j)},\ z \in S^{(j)}, \tag{3}$$

де $\Phi_3(z_3) = \varphi'_3(z_3)$, $\Phi_3^{(j)}(z_3^{(j)}) = \varphi'^{(j)}_3(z_3^{(j)})$, а аналітичні функції $\varphi_3, \varphi_3^{(j)}$ комплексних аргументів $z_3 = x + \mu_3 y$, $z_3^{(j)} = x + \mu_3^{(j)} y$ визначають переміщення $w(x,y) = a_0\,\mathrm{Im}[\varphi_3(z_3)]$ та компоненти напружень $\tau_{xz}(x,y) = -\mathrm{Re}[\mu_3\Phi_3(z_3)]$,

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_27.pdf

$\tau_{yz}(x,y) = \mathrm{Re}[\Phi_3(z_3)]$. Контури $L_3, L_3^{(j)}$ у комплексних математичних площинах $z_3, z_3^{(j)}$ відповідають контурам $L, L^{(j)}$ у площині $z = x + iy$. Для заданого навантаження $\Gamma_3=\tau$, а комплексну сталу $\Gamma_3^{(j)}$ в області $S^{(j)}$ потрібно вибрати таким чином, щоб за переходу через контур L забезпечувалась неперервність напружень [1].

Для задоволення крайових умов (1) та

$$dw^{+}(t)/ds - dw^{-}(t)/ds = g'^{*}(t)dt/ds,\ s = s(t),\ t \in L \tag{4}$$

граничні значення потенціалів (3) знайдено за використання формул Сохоцького-Племеля для інтегралів Коші. Задачу зведено до розв'язування систем СІР другого роду

$$\begin{gathered}\mathrm{Im}[\phi_3'(s)] + \frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{Re}\left\{K_1(s',s)\phi_3'(s') + M_1(s',s)\overline{\phi_3'(s')}\right\}ds' = 0,\ s = s(t),\ t \in L;\\ \mathrm{Re}[\phi_3'(s)] + \frac{1}{\pi}\int_L \mathrm{Im}\left\{K_2(s',s)\phi_3'(s') + M_2(s',s)\overline{\phi_3'(s')}\right\}ds' = \mathrm{Im}[f_2(s)],\end{gathered} \tag{5}$$

де $f_2(s) = \{a_0\Gamma_3 dt_3/ds - a_0^{(j)}\Gamma_3^{(j)}dt_3^{(j)}/ds\}/(a_0 + a_0^{(j)})$, ядра K_1, M_1, K_2, M_2 – функції геометричних та фізичних параметрів задачі у комплексних площинах $z_3, z_3^{(j)}$ і містять відповідні інтеграли Коші у цих математичних площинах, $s = s(t)$ – дугова абсциса точки $t \in L$.

Для одного анізотропного включення (j=1) у матриці побудовану систему СІР (5) розв'язували чисельно методом квадратур [3]. Визначено розподіли контактних напружень $\tau_{nz}^{+}(t) = \tau_{nz}^{-}(t)$ на контурі включення, зсувних напружень зі сторони матриці $\tau_{sz}^{-}(t)$ та включення $\tau_{sz}^{+}(t)$ для різних параметрів задачі. Отримані результати для контурних напружень $\tau_{sz}^{\pm}(t)$ дозволяють підбирати параметри компонентів композиту для мінімізації коефіцієнтів концентрації напружень на контурах з'єднання включень та матриці.

1. *Долгих В.Н., Фильштинский Л.А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами // Изв. АН СССР, МТТ. – 1980. – № 4. – С. 103–110.
2. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – С. 416.
3. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.

LONGITUDINAL SHEAR OF ORTHOTROPIC BODY WITH ANISOTROPIC CURVILINEAR INCLUSIONS

The antiplane problem of the theory of elasticity for an orthotropic body with curvilinear anisotropic inclusions was solved using the method of singular integral equations. The obtained singular integral equations of the second kind were solved numerically by the quadrature method. The effects of elastic characteristics of anisotropic materials and forms of curvilinear inclusions on contact and contour stress distributions were studied.