УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН КВАЗІОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРУЖНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Володимир Кравець, Андрій Чорненький

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

vlad@ipm.lviv.ua, a.b.chornenkyi@gmail.com

Розглянуто плоску задачу теорії пружності для квазіортотропного тіла з криволінійним квазіортотропним включенням. Побудоване сингулярне інтегральне рівняння (СІР) другого роду методом механічних квадратур зведено до розв’язування системи лінійних алгебричних рівнянь. Визначено розподіли контактних і контурних напружень на контурах включень різних форм.

Нехай у квазіортотропній [1, 2] площині S, віднесеній до базисної декартової системи координат xOy з осями вздовж осей ортотропії матеріалу площини міститься криволінійне квазіортотропне включення $S^{(1)}$, обмежене гладким замкненим контуром L і віднесене до локальної декартової системи координат $x^{(1)}O_1y^{(1)}$, вісь $O_1x^{(1)}$ якої утворює кут $\alpha^{(1)}$ з віссю Ox. Площина S на нескінченності завантажена напруженнями $\sigma_y^\infty = p, \sigma_x^\infty = q, \tau_{xz}^\infty = \tau$. Пружні сталі площини (матриці) позначимо $E_1, E_2, G, \kappa, \gamma = \sqrt[4]{E_1 / E_2}$, а включення – $E_1^{(1)}, E_2^{(1)}, G^{(1)}, \kappa^{(1)}, \gamma^{(1)} = \sqrt[4]{E_1^{(1)} / E_2^{(1)}}$. Вважатимемо, що граничні значення напружень на контурі L однакові як у включенні, так і в матриці:

$$[N(t) + iT(t)]^+ = [N(t) + iT(t)]^-,\ t \in L, \tag{1}$$

а переміщення можуть зазнавати розриву

$$2G d\big/dt[(u+iv)^+ - (u+iv)^-] = g'(t),\ t \in L. \tag{2}$$

Комплексні потенціали напружень шукатимемо у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \Gamma - \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{\phi_1(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad \Psi_1(z_1) = \Gamma' - \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} \frac{\psi_1(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad z \in S;$$
$$\Phi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) = \Gamma_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{L_1^{(1)}} \frac{\phi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})}{\tau_1^{(1)} - z_1^{(1)}} d\tau_1^{(1)}, \Psi_1^{(1)}(z_1^{(1)}) = \Gamma'_1 + \frac{1}{2\pi}\int_{L_1^{(1)}} \frac{\psi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})}{\tau_1^{(1)} - z_1^{(1)}} \tau_1^{(1)}, z \in S^{(1)}, \tag{3}$$

де комплексні сталі

$$2\Gamma = (p + q\gamma^{-2})/2, \ \ \Gamma' = (p - q\gamma^{-2})/2 + i\tau/\gamma;$$

$$2\Gamma_1 = (p + q/(\gamma^{(1)})^2)/2, \Gamma_1' = (p - q/(\gamma^{(1)})^2)/2 + i\tau/\gamma^{(1)},$$

що визначають однорідні напружені стани в областях S і $S^{(1)}$ вибрано таким чином, щоб на контурі L забезпечувалася неперервність відповідних напру-

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me03_28.pdf

жень. Тут прийнято за додатний обхід контуру L – напрям проти годинникової стрілки, коли область включення $S^{(1)}$ розташована ліворуч. Контури L_1 і $L_1^{(1)}$ у комплексних площинах $z_1 = x + i\gamma y$ і $z_1^{(1)} = x^{(1)} + i\gamma^{(1)} y^{(1)}$ відповідають контуру L у площині $z = x + iy$.

На основі заданої умови ідеального силового контакту матриці з включенням (1) знайдено зв'язок між невідомими функціями – густинами потенціалів (3) $\phi_1(\tau_1), \psi_1(\tau_1), \phi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)}), \psi_1^{(1)}(\tau_1^{(1)})$. Визначивши граничні значення потенціалів (3) за використання формул Сохоцького-Племеля для інтегралів типу Коші, граничні вектора напруження N+iT можна записати у вигляді [2]

$$N^- + iT^- = [(1+\gamma)P_1(t_1)dt_1 / dt + (1-\gamma)\overline{P_1(t_1)}d\overline{t_1} / dt]/2,$$

$$N^+ + iT^+ = [(1+\gamma^{(1)})P_1^{(1)}(t_1^{(1)})dt_1^{(1)} / dt^{(1)} + (1-\gamma^{(1)})\overline{P_1^{(1)}(t_1^{(1)})}d\overline{t_1}^{(1)} / dt^{(1)}]/2,$$

де $P_1(t_1) = \Phi_1(t_1) + \overline{\Phi_1(t_1)} + \left(t_1\overline{\Phi'_1(t_1)} + \overline{\Psi_1(t_1)}\right)d\overline{t_1} / dt_1$ і аналогічно для $P_1^{(1)}(t_1^{(1)})$ – через потенціали для включення. Тут відсутні позаінтегральні доданки внаслідок неперервності напружень N+iT за переходу через контур L (1).

Задовольнивши граничну умову (2), отримано комплексне СІР 2-го роду

$$C\phi_1(\tau_1) + D\overline{\phi_1(\tau_1)} + \frac{1}{\pi}\int_L [M(\tau_1, t_1)\phi_1(\tau_1) + N(\tau_1, t_1)\overline{\phi_1(\tau_1)}]d\tau = G^{(1)}g'(t)/G,\ t \in L, \quad (4)$$

де сталі C, D визначаються пружними характеристиками матеріалів матриці та включення, ядра $M(\tau_1, t_1), N(\tau_1, t_1)$ – механічними та геометричними параметрами задачі, поданими у різних площинах $z, z_1, z_1^{(1)}$. Для кусково-ізотропної площини ($\gamma = \gamma^{(1)} = 1$) з рівняння (4) отримуємо відоме СІР [3].

На основі числового розв'язування СІР (4) визначено розподіли контурних $\sigma_s^+(t), \sigma_s^-(t)$ та контактних напружень N+iT на контурах квазіортотропних включень різних форм та рівнів ортотропії матриці та включень.

1. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
2. *Savruk M.P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham (Switzerland): Springer, 2017. – 516 p.
3. *Savruk M.P., Kuznyak N.V.* Solving two-dimensional cases for cracks in piecewise-homogeneous bodies // Mater. Sci. – 1989. – **25**, No. 4. – P. 407–415.

THE STRESS STATE OF A QUASI-ORTHOTROPIC PLANE WITH AN ELASTIC CURVILINEAR INCLUSION

The plane problem of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with a curvilinear quasi-orthotropic inclusion is considered. The obtained singular integral equation of the second kind is reduced to the solution of a system of linear algebraic equations by the method of mechanical quadrature. The distribution of contact and contour stresses on the contours of inclusions of various shapes was determined.