УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА КРУЧЕННЯ ДВІЧІ-ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО СФЕРИЧНО-ШАРУВАТОГО КОНУСА

Костянтин Мисов

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова

kmysov2309@gmail.com

Розв'язано осесиметричну динамічна задача кручення двічі-зрізаного сферичними поверхнями пружного сферично-шаруватого конуса у випадку усталених крутильних коливань, коли всі характеристики представлено у вигляді $\widehat{f}(r,\theta,\varphi,t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(r,\theta,\varphi)$. У всіх наступних формулах $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ опущено. Момент кручення прикладено до конуса через абсолютно жорстку накладку, що зчеплена з нижньою сферичною поверхнею. Беручи до уваги геометрію конуса та поверхонь зрізу, а також характер навантаження, задачу сформульовано у сферичній системі координат (r,θ,φ).

Для розв'язання задачі необхідно знайти невідоме переміщення j-го шару $w^{(j)}(r,\theta)=u_{\varphi}^{(j)}(r,\theta), j=\overline{1,n}$, яке задовольняє рівняння кручення

$$\left(r^2\left(w^{(j)}(r,\theta)\right)'\right)'+\frac{\left(\sin\theta\left(w^{(j)}(r,\theta)\right)^{\bullet}\right)^{\bullet}}{\sin\theta}-\frac{w^{(j)}(r,\theta)}{\sin^2\theta}=-\left(rq^{(j)}\right)^2 w^{(j)}(r,\theta),$$

$$a_{j-1}\le r\le a_j, 0\le\theta\le\psi$$

граничні умови

$$w^{(1)}(r,\theta)\Big|_{r=a_0}=\alpha l F(\theta), 0\le\theta\le\psi,$$

$$w^{(n)}(r,\theta)\Big|_{r=a_n}=0, 0\le\theta\le\psi,$$

$$G^{(j)}r^{-1}\left(\left(w^{(j)}(r,\theta)\right)^{\bullet}-w^{(j)}(r,\theta)\cot\theta\right)\Big|_{\theta=\psi}=0, a_{j-1}\le r\le a_j,$$

та умови ідеального контакту на стиках шарів, де $f^{\bullet}=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $f'=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $q^{(j)}=\dfrac{\omega}{c^{(j)}}$, $c^{(j)}=\sqrt{G^{(j)}/\rho^{(j)}}$, $\rho^{(j)}$ – густина, $G^{(j)}$ – модуль

http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/me04_01.pdf зсуву, $j=\overline{1,n}$, $l=a_n-a_0$, $F(\theta)$ – задана неперервна функція та α – невідомий кут отвору який знаходиться з рівняння руху накладки

$$2\pi a_0{}^3\int_0^{\psi}\sin^2\theta\tau^{(1)}(a_0,\theta)d\theta+M+\omega^2\alpha J=0,$$

де M – момент кручення накладки та J – відомий момент інерції накладки.

Після застосування інтегрального перетворення Г.Я. Попова [1]

$$w_k^{(j)}(r)=\int_0^{\psi}\sin\theta w^{(j)}(r,\theta)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)d\theta,$$

$$w^{(j)}(r,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{w_k^{(j)}(r)P_{\nu_k}^1(\cos\theta)}{\left\|P_{\nu_k}^1(\cos\theta)\right\|^2},$$

задача зводиться до одновимірної крайової задачі, для якої побудовано точний розв'язок

$$w_k^{(j)}(r)={}_1\Phi_k^{(j)}(r)\,{}_1C_k^{(j)}+{}_2\Phi_k^{(j)}(r)\,{}_2C_k^{(j)},a_{j-1}\le r\le a_j,j=\overline{1,n},$$

де $\left\{{}_1\Phi_k^{(j)}(r),{}_2\Phi_k^{(j)}(r)\right\},a_{j-1}\le r\le a_j,j=\overline{1,n}$ – фундаментальні розв'язки рівняння кручення. Після використання граничних умов на стиках шарів отримано систему з якої знайдено невідомі сталі ${}_1C_k^{(j)},{}_2C_k^{(j)},j=\overline{1,n}$.

$$\begin{cases}{}_1C_k^{(j)}=\alpha l^{(1)}F_k\,{}_1A_k^{(j)}\left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_1A_k^{(1)}+{}_2\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_2A_k^{(1)}\right)^{-1}\\ {}_2C_k^{(j)}=\alpha l^{(1)}F_k\,{}_2A_k^{(j)}\left({}_1\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_1A_k^{(1)}+{}_2\Phi_k^{(1)}(a_0)\,{}_2A_k^{(1)}\right)^{-1}\end{cases},j=\overline{1,n}.$$

Тут $\left\{{}_1A_k^{(j)},{}_2A_k^{(j)}\right\},j=\overline{1,n}$ розраховано за ітеративною процедурою.

Було проведено числовий аналіз хвильового поля для досліджуваного об'єкту та порівняно напруження на боковій поверхні для різної кількості шарів та при їх різних механічних характеристиках.

1. *Popov G.Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // International Applied Mechanics. – 2003. – **39**, № 12. – С. 1400–1424.

DYNAMIC TORSION PROBLEM FOR A TWICE-TRUNCATED ELASTIC SPHERICALLY LAYERED CONE

The dynamic rotation problem for a twice-truncated elastic spherically-layered cone in the case of steady-state oscillations is solved with the help of the Popov integral transform. The solution was derived in the iterative form which allows us to use it for an arbitrary number of layers. The stress field was analyzed numerically.