

УДК 532.59:534.29

ДІЯ РАДІАЦІЙНИХ СИЛ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ В РІДИНІ НА КРАПЛІ ІНШОЇ РІДИНИ

Олександр Жук, Ярослав Жук

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка*

opzhuk1939@gmail.com, y.zhuk@i.ua

З використання методу [2, 3] досліджено систему двох сферичних крапель рідини радіусів R_1 і R_2 в іншій рідині на відстані l одна від одної. Густини рідин в краплях відповідно ρ_1 і ρ_2 , а швидкість звуку – a_1 і a_2 . Використано декартову систему $Oxyz$ з початком в точці O , який розташовано посередині між центрами крапель. Вісь Oz проходить через центри крапель в напрямі до 2-ї краплі. Хвильове рівняння має вигляд:

$$\Delta\Phi - a_0^{-2}\partial^2\Phi / \partial t^2 = 0, \quad (1)$$

де Δ – оператор Лапласа, Φ – потенціал акустичної хвилі, a_0 – швидкість хвилі в зовнішній рідині. Потенціал первинної акустичної хвилі, який є розв'язком рівняння (1), подамо виразом

$$\Phi_i = A \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2)$$

де A – амплітуда, $k = \omega/a_0$ – хвильове число, ω – кутова частота.

Визначення потенціалів розсіяних на краплях хвиль, обумовлених хвилею (2), зводиться до знаходження розв'язків (1), що задовольняють умови випромінювання на нескінченності і крайові умови на поверхні кожної краплі, які вимагають неперервності радіальних компонент швидкості зовнішньої і внутрішньої рідини на поверхнях крапель і неперервності тиску при переході через поверхню крапель. Для розв'язання задачі використаємо метод [1] та локальні системи сферичних координат $(r_s, \theta_s, \varphi_s)$ з початками в центрах крапель ($s = 1, 2$), де θ_s відраховується від осі $O_s z$ і $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Потенціали первинної хвилі і розсіяних на краплях хвиль подамо у вигляді:

$$\Phi_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} 2Ae^{(-1)^s ikl/2} i^n j_n(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1,2; \quad (3)$$

$$\Phi_d^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(s)} h_n^{(1)}(kr_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1,2. \quad (4)$$

Потенціал хвильового поля в s -й краплі запишемо в такому вигляді:

$$\Psi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n^{(s)} j_n(\bar{k}_s \bar{r}_s) P_n(\cos\theta_s) e^{-i\omega t}, \quad s=1,2. \quad (5)$$

В формулах (3)–(5) $j_n(kr_s)$ – сферичні функції Бесселя, $h_n^{(1)}(kr_s)$ – сферичні функції Ганкеля, $P_n(\cos \theta_s)$ – ортонормовані поліноми Лежандра.

У кожній з локальних систем координат потенціал хвильового поля в зовнішній рідині визначається співвідношенням

$$\Phi^{(s)} = \Phi_i^{(s)} + \sum_{s=1}^2 \Phi_d^{(s)}, \quad s = 1, 2. \quad (6)$$

Для використання умов на поверхнях крапель в обчисленні $A_n^{(s)}, \bar{A}_n^{(s)}$ в (4)–(5), потенціал (6) потрібно записати в кожній з локальних систем координат. Для цього використано теорему додавання сферичних хвильових функцій [1].

При визначенні гідродинамічної сили, що діє на s -у краплю в напрямі осі Oz , і яка обчислюється за формулою

$$F_z^{(s)} = -\iint_S p^{(s)} \cos \theta_s dS, \quad (7)$$

тиск $p^{(s)}$ в зовнішній рідині згідно з прийнятим методом [2, 3] необхідно обчислювати з точністю до величин другого порядку мализни за формулою

$$p^{(s)} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 (\nabla \Phi^{(s)})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial t} \right)^2.$$

Після осереднення в часі (7) одержуємо формулу для обчислення акустичної радіаційної сили, яка діє на кожну з крапель

$$\begin{aligned} \langle F_z^{(s)} \rangle = & 2\pi\rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ (K_n^{(s)} K_{n+1}^{(s)} + L_n^{(s)} L_{n+1}^{(s)}) [n(n+2) - \alpha_s^2] + \right. \\ & \left. + \left(\frac{dK_n^{(s)}}{d\alpha_s} \frac{dK_{n+1}^{(s)}}{d\alpha_s} + \frac{dL_n^{(s)}}{d\alpha_s} \frac{dL_{n+1}^{(s)}}{d\alpha_s} \right) \alpha_s^2 \right\}, \alpha_s = kR_s, s = 1, 2. \end{aligned}$$

1. *Гузь А.Н., Головач В.Т.* Дифракция упругих волн в многосвязных телах. – Киев: Наук. думка, 1972. – 254 с.
2. *Жук А.П.* Гидродинамическое взаимодействие сферических частиц, обусловленное звуковой волной, распространяющейся вдоль линии центров // Прикл. механика. – 1984. – 20, № 9. – С. 111–116.
3. *King L.V.* On the Acoustic Radiation Pressure on Spheres // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1934. – 147, № 861. – P. 246–265.

ACTION OF ACOUSTIC FIELD RADIATION FORCE IN LIQUID UPON DROPS OF OTHER LIQUID

A problem on the interaction of two spherical drops of an ideal liquid in another ideal liquid is solved. The interaction between drops is caused by a plane acoustic wave propagating along the line of the drop centers. The measure of drop interaction is defined as the acoustic radiation force – the time-averaged value of the hydrodynamic force acting in the acoustic field on each of the drops.