

УДК 539.3:534.1:624.071

ДО ПИТАННЯ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ СТЕРЖНЯ ІЗ ЗОВНІШНІМ СУХИМ ТЕРТЯМ ПРИ НЕЛІНІЙНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Василь Перепічка

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

v.v.perepichka@gmail.com

В рамках класичної теорії розглянуто задачу нестационарної динаміки півнескінченного стержня, що взаємодіє з середовищем через бокові поверхні шляхом фрикційного проковзування в контакт, при нелінійному законі зростання сили притиску на торці. Нелінійна початково-крайова задача для знаходження переміщень стержня $u(X, T)$ в процесі збурення поздовжньою силою $N(T)$ записується наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(X, T)}{\partial X^2} + \frac{\Pi}{A} \frac{\tau_X}{E} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u(X, T)}{\partial T^2}, \quad X \geq 0, T > 0; \\ \frac{\partial u(X, T)}{\partial T} \neq 0: \tau_X &= -\tau_c \operatorname{sgn} \frac{\partial u(X, T)}{\partial T}, \quad \frac{\partial u(X, T)}{\partial T} = 0: |\tau_X| \leq \tau_c; \\ u(X, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u(X, 0)}{\partial T} = 0, \quad X \geq 0; \\ \frac{\partial u(0, T)}{\partial X} &= -\frac{N(T)}{AE} H(T), \quad u(\infty, T) = 0, \quad T > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут X , T – координата та час у вибраній системі відліку з початком на краю стержня; A – площа поперечного перерізу стержня, Π – довжина частини периметру, де діє сухе тертя; τ_X – дотичні напруження на бічній поверхні, τ_c – порогове значення дотичних напружень; ρ , E – густина та модуль Юнга матеріалу стержня; $N(T) = A\sigma_0(T/n)^k$, σ_0 – довільне еталонне робоче напруження притиску в задачі удару, n – час (у секундах), k – параметр нелінійності навантаження торця, $k \in (0, 1) \cup (1, \infty)$; $H(t)$ – функція Гевісайда.

Наявність нестационарності в правій частині рівняння (1) призводить до того, що отриманий розв'язок відповідає задачі коливальних. Має місце поява на

фронті відбитої хвилі або виникнення тимчасової області зупинки руху, де наявні залишкові напруження на час зупинки та повторне подальше збурення для зрушених перерізів. Така специфіка дослідженої задачі: розв'язок не будується на одній прямій хвилі.

Знерозміренням і нормуванням шуканої функції, а також з врахуванням того, що в відліковій конфігурації немає залишкових напружень, початково-крайову задачу (1) було зведено до універсальної форми запису:

$$\begin{aligned} f'' &= \ddot{f} + \operatorname{sgn} \dot{f}, & x \geq 0, t > 0; \\ f(x, 0) &= 0, \quad \dot{f}(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ f'(0, t) &= t^k H(t), \quad f(\infty, t) = 0, & t > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $f(x, t) \equiv \frac{u(x, t)}{N}$, $N = \frac{\Pi \tau_c n^2}{A \rho} \left(\frac{1}{M} \right)^{k-1}$ при знерозміренні фізичних змін-

них із масштабуванням: $x = \frac{X}{n} \sqrt{\frac{\rho}{E}} M^{k-1}$, $t = \frac{T}{n} M^{k-1}$, $M = \frac{\sigma_0}{\tau_c} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{A}{n\Pi}$.

Для обґрунтування існування розв'язку та його побудови розглядалися дві споріднені з (2) задачі, а саме задача збурення заданим навантаженням стержня за відсутності тертя на боковій поверхні та задача про поширення дотичних зусиль на боковій поверхні стержня зі змінною в часі швидкістю, що не локально завжди менша за акустичну характеристику матеріалу стержня. В просторі трансформант перетворення Лапласа отримано розв'язок задачі (2) як суперпозицію розв'язків споріднених задач за умови виконання інтегральної рівності, що пов'язує функцію фронту збурення по довжині стержня в задачі про дотичні зусилля та закон навантаження в часі торця для задачі збурення стержня без тертя.

В дійсних змінних розв'язок (2) будувався на ґрунті отриманого структурного подання через дві невідомі функції:

$$f(x, t) = \left\{ \frac{1}{k+1} (t-x)^{k+1} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} [\phi(t+x) + \phi(t-x)] \right\} H(L(t) - x).$$

Для неударного лінійного збурення торця ($k = 1$) запропонований спосіб побудови розв'язку також чинний та співпадає з відомими результатами.

TO THE QUESTION ON CONSTRUCTING SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF ROD DYNAMICS WITH EXTERNAL DRY FRICTION UNDER NONLINEAR LOADS

Analytical approach to constructing solutions to the problem of rod dynamics under external dry friction under nonlinear loading is substantiated and implemented on examples.