

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Роман Андрійчук, Ярослав Кунець,
Валерій Матус, Василь Пороховський

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

andriychukroman@gmail.com, kunets56@gmail.com, vmatus56@gmail.com

Нехай у пружному ізотропному середовищі знаходиться тонке дискове п'єзокерамічне (за кругової поляризації) включення змінної товщини, яке займає область $W_\varepsilon = \{(r, z) : 0 \leq r \leq a, \varepsilon f_-(r) \leq z \leq \varepsilon f_+(r)\}$, де $Or\theta z$ – циліндрична система координат; a і $h(r) = \varepsilon f(r) = \varepsilon[f_+(r) - f_-(r)]$ – радіус і товщина включення; ε – малий безрозмірний параметр, що характеризує відносну товщину включення. Електропружна система перебуває в умовах осесиметричного кручення та динамічних навантажень.

Рівняння руху і рівняння Максвелла для матеріалу включення у циліндричній системі координат запишемо [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^0}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^0}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta}^0 + k_0^2 u_\theta^0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^0 = \frac{\partial D_r^0}{\partial r} + \frac{D_r^0}{r} + \frac{\partial D_z^0}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

$\sigma_{r\theta}^0$, $\sigma_{\theta z}^0$ – компоненти тензора напружень; u_θ^0 – відмінна від нуля компонента вектора зміщень; D_r^0 та D_z^0 – компоненти вектора індукції електричного поля \mathbf{D}^0 ; $k_0 = \omega / c_0$ та $c_0 = \sqrt{c_{44}(1 + \eta^2)} / \rho_0$ – хвильове число та швидкість поперечних хвиль у включенні; ρ_0 , c_{44} , e_{15} , ε_{11} – густина, пружна та п'єзоелектрична сталі, діелектрична проникність матеріалу включення; $\eta = e_{15}^2 / (c_{44} \varepsilon_{11})$ – коефіцієнт електромеханічного зв'язку.

Матеріальні рівняння для матеріалу включення мають вигляд

$$\sigma_{r\theta}^0 = c_{44} \left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} + \eta^2 \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r} \right), \quad \sigma_{\theta z}^0 = c_{44} \left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} + \eta^2 \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z} \right),$$
$$D_r^0 = e_{15} \left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial r} - \frac{u_\theta^0}{r} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial r} \right), \quad D_z^0 = e_{15} \left(\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_p^0}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$\varphi_p^0(r, z) = \varepsilon_{11} \varphi^0(r, z) / e_{15}, \quad (3)$$

де $\varphi^0(r, z)$ – електричний потенціал включення.

Розглянуто випадок ідеального механічного контакту між складовими композиту. Зокрема, на лицьових поверхнях включення маємо:

$$u_\theta(r, z) = u_\theta^0(r, z), \quad \sigma_n(r, z) = \sigma_n^0(r, z), \quad (r, z) \in \partial W_\varepsilon, \quad (4)$$

де $\sigma_n = \sigma_{\theta z} n_z + \sigma_{\theta r} n_r$, $\sigma_n^0 = \sigma_{\theta z}^0 n_z + \sigma_{\theta r}^0 n_r$, $n_z^\pm \approx \pm 1$, $n_r^\pm \approx 2\varepsilon f'_\pm(r)$.

Для електроізоляованого та заземленого включення на поверхні неоднорідності виконуються відповідно граничні умови:

$$D_n^0(r, z) = 0, \quad \varphi^0(r, z) = 0, \quad (r, z) \in \partial W_\varepsilon, \quad (5)$$

де $D_n^0 = D_z n_z + D_r n_r$. Тут $u_\theta(r, z)$, $\sigma_{\theta r}(r, z)$ та $\sigma_{\theta z}(r, z)$ – повні поля зміщень та напружень у матриці.

Оскільки відносна товщина включення мала, для отримання наближених розв'язків задачі використовуємо методи теорії сингулярних збурень [2, 3], подаючи шукані величини у вигляді асимптотичних розкладів за степенями ε .

Характер цих розкладів визначається співвідношенням між параметром контрастності жорсткостей складових електропружної системи $\gamma = c_{44}/\mu$ та ε . Тому розглядаються три різні діапазони зміни параметра γ : **1)** $\varepsilon \leq \gamma \leq 1/\varepsilon$; **2)** $0 \leq \gamma \leq \varepsilon$; **3)** $1/\varepsilon \leq \gamma < \infty$. Діапазон **1** відповідає неконтрастним неоднорідностям, **діапазони 2 та 3** описують випадки включень малої та великої жорсткостей.

Досліджено напружено-деформований стан тіла в околі гострокінцевих включень.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.
2. Кунець Я.І., Матус В.В. Асимптотичний підхід у динамічних задачах теорії пружності для тіл з тонкими пружними включеннями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 1. – С. 75–93.
3. Kunets Ya. I. Axisymmetric torsion of an elastic space with a thin elastic inclusion // J. App. Math. Mech. – 1987. – **51**, No. 4. – P. 497–503.

DYNAMIC INTERACTION OF ELASTIC BODY WITH THIN PIEZOCERAMIC INCLUSION OF VARIABLE THICKNESS

A mathematical models of dynamic interaction of a thin piezoceramic inclusion of variable thickness with isotropic elastic medium under axisymmetric torsion of a composite are constructed. Conditions of the perfect mechanical contact on the interface of components are satisfied. Cases of electrically insulated and grounded piezoceramic inclusions are considered. Modeling is performed using the theory of singular perturbations.