

УДК 517.929

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ІНФЕКЦІЙНИХ ЗАХВОРЮВАНЬ НА ОСНОВІ SIR МОДЕЛЕЙ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ігор Черевко, Тетяна Щур

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.cherevko@chnu.edu.ua, tetiana.lunyk@chnu.edu.ua

Періодичні спалахи інфекційних захворювань стимулювали активні наукові дослідження їх поширення. Важливим інструментом для розуміння механізмів поширення хвороб є математичне та імітаційне моделювання. Математичні моделі динаміки інфекційних захворювань детально проаналізовані в наукових дослідженнях [1–3]. Як правило, це компартментні SIR моделі: системи диференціальних рівнянь, що описують поширення захворювання в популяції розміру N , які мають три «компартменти». Кожен компартмент є функцією часу t : $S(t)$ – кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою, $I(t)$ – кількість інфікованих осіб, а $R(t)$ – кількість осіб, які одужали від захворювання та мають імунітет.

Вважаємо, що інкубаційний період вірусу хвороби $\tau_1 > 0$ (орієнтовно 3 дні), а період відновлення $\tau_2 > 0$ (орієнтовно 1–3 тижні). Інкубаційний період є часом від контакту до розвитку симптомів вірусу, а період відновлення – час від зараження до отримання повного імунітету та переміщення в групу осіб, які одужали.

Динаміку моделі такого процесу можна описати так [4]:

$$\frac{dS}{dt} = -bS(t-t_1)I(t-t_1),$$

$$\frac{dI}{dt} = bS(t-t_1)I(t-t_1) - gI(t-t_2) - aI(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = gI(t-t_2).$$

У роботі для автоматизації моделювання систем із запізненням розроблено прикладне програмне забезпечення. Для числового моделювання задач Коші для диференціальних рівнянь із запізненням використовуються наближені алгоритми, які є узагальненням різницевих схем для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь [5]. Розроблений додаток є набором структурованих сторінок для розв’язання диференціально-різницевих рівнянь

та побудови графіків розв'язків.

На рисунку наведено наближений розв'язок розглянутої SIR моделі із запізненнями за допомогою модифікованого ітераційного методу Ейлера [5] з початковими умовами $y_1(0) = 5, y_2(0) = 1, y_3(x) = 0$ при $t \geq 0$ та параметрами $h = 0.1, \tau_1 = 1, \tau_2 = 10$.

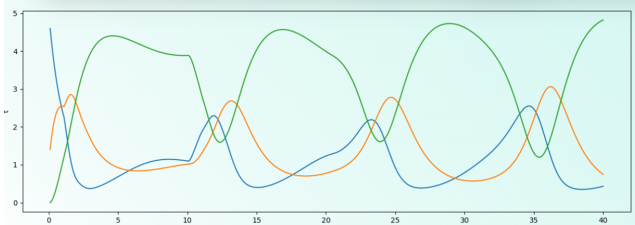


Рис. 1 Розв'язок SIR моделі

Із отриманих числових експериментів можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при інкубаційному періоді $\tau_1 = 1$) виникають, якщо імунітет втрачається за час $\tau_2 \geq 7$. Епідемія стабілізується, якщо $\tau_2 \leq 6$.

Аналіз математичних моделей біології, екології, медицини показав, що введення в них запізнення дозволяє адекватно описувати реальні процеси. Для числового моделювання початкових задач із запізненнями ефективними виявилися побудовані різницеві схеми, які є узагальненнями класичних різницевоїх схем. Числові експерименти дозволили при моделюванні SIR моделі із запізненням виявити можливі спалахи епідемії при достатньо великому інкубаційному періоді хвороби.

2. *Rihan F.A.* Delay differential equations and applications to biology. – Singapore: Springer, 2021. – 303 p.
3. *Vascaër N.* McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927) / In: A Short History of Mathematical Population Dynamics. – London: Springer, 2011. – P. 89–96.
4. *Blackwood J.C., Childs L.M.* An introduction to compartmental modeling for the budding infectious disease modeler // Letters in Biomathematics. – 2018. – No. 5. – P. 195–221.
5. *Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E.* Delayed dynamics of SIR model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation. – 2021. – № 9. – P. 146–158.
6. *Луник Т.В., Черевко І.М.* Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням // Буковинський матем. журнал. – 2021. – 8, № 2. – С. 92–98.

SIMULATION OF INFECTIOUS DISEASES SPREAD BASED ON SIR MODELS WITH DELAYS

The SIR model, which describes the dynamics of infectious disease COVID-19 spread, is considered. Algorithms for finding its approximate solution is proposed. An applied application for automating the simulation of infectious disease spread has been developed on this basis.